

Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

**Il fenomeno dell'entanglement quantistico e
suoi possibili riscontri in astrofisica**

Elaborato Finale

Candidata:

Anna Elisabetta Borea

Relatore:

Chiar.mo Prof.:

Francesco Ravanini

Indice

1	I 5 postulati della Meccanica Quantistica	8
1.1	Spazi di Hilbert e raggio vettore	8
1.2	Corrispondenza 1:1 tra \mathcal{H} , \mathbb{L}^2 ed l^2	9
1.3	Postulati	10
1.3.1	Postulato 1: gli stati di un sistema	10
1.3.2	Postulato 2: osservabili fisiche	10
1.3.3	Postulato 3: misure e probabilità	12
1.3.4	Postulato 4: dinamica, evoluzione: equazione di Schrödinger . .	13
1.3.5	Postulato 5: sistemi composti	15
2	Formalismo dei sistemi puri e dei sistemi miscelati	18
2.1	Probabilità estrinseca; introduzione alla miscela	18
2.2	Sistemi miscelati: miscela statistica di stati	18
2.3	Differenza tra uno stato puro sovrapposto e una miscela	19
2.4	Operatore densità per un sistema in uno stato puro	21
2.5	Operatore densità per un sistema miscelato	24
3	L'algebra di \hat{J}	29
3.1	\hat{J} : un momento angolare astratto	29
3.2	Spazio interno degli spin: $\mathbb{L}_{\hat{J}_{1/2}}^2$	32
3.3	Composizione dei momenti	34
3.4	Sistemi composti con $\mathbf{j}_1 = \mathbf{1}/2$ e $\mathbf{j}_2 = \mathbf{1}/2$: rappresentazione spinoriale .	36
4	Entanglement: la fisica dei sistemi ingarbugliati	40
4.1	Introduzione all'entanglement	40
4.2	Matrice di densità ridotta	41
4.3	Decomposizione di Schmidt	43
4.4	Sistemi bipartiti separabili ed entangled	45
4.5	Stima dell'entanglement: le entropie	48
4.5.1	Entropia di Shannon	48
4.5.2	Entropia di Von Neumann	49

4.5.3	Entropia di un sistema bipartito	49
4.5.4	Entropia di Renyi	50
4.5.5	Entanglement di formazione	50
5	EPR vs Bell	53
5.1	Le tre condizioni di Einstein	53
5.2	Paradosso EPR	54
5.3	Teorema di Bell	56
5.4	Gli esperimenti: dal 1964 al 2019	60
5.4.1	Disuguaglianze BCHSH: adattamento di Bell al caso empirico .	60
5.4.2	Aspect	63
5.4.3	La prima immagine dell'entanglement	65
6	L'universo ingarbugliato	68
6.1	L'atomo di Idrogeno	68
6.2	Struttura iperfine e regioni HI	71
6.3	Diidrogeno: regioni H_2	73
6.4	Regioni HII	74
6.5	Sfera di Strömgren	75
6.6	"Quantum entanglement in astrophysics"	76
6.6.1	IC2149 ed NGC7293	76
6.6.2	Nebulosa di Orione	77
6.6.3	Corona solare	78
6.6.4	Produzione di coppie entangled	79
6.7	Entanglement nella transizione $2^2S_{\frac{1}{2}}$	80
6.7.1	Regioni astrofisiche	81

"Non è la materia che genera il pensiero, è il pensiero che genera la materia"
GIORDANO BRUNO

Introduzione

Decido di aprire questo scritto con una citazione del filosofo, probabilmente, a me più caro. Visionario tra gli idealisti, impavido tra i coraggiosi, si è spinto oltre il limite percettivo per concepire quello che altri non osavano pensare. La natura della frase di Giordano Bruno si presta in ogni sua lettura al racconto di chi, come lui, ha smosso i costrutti dello scibile ed ha plasmato teorie che hanno dato forma alla reale natura della materia e anche della luce.

La materia e la luce: le prime due entità che l'uomo ha rilevato essere presenti nel nostro universo. Cos'è che accomuna queste due entità all'apparenza così diverse? Per dare risposta alla domanda dobbiamo riavvolgere il nastro, tornare ai tempi dei primi uomini investigatori della natura: dal libro della Genesi al Corano, da Aristotele a Pitagora l'uomo non ha smesso di chiedersi cosa fosse la luce.

Dobbiamo a Galileo la concezione di un limite superiore alla velocità della luce, a Huygens e Hooke la sua natura ondulatoria e, quasi contemporaneamente ad Isaac Newton (e i suoi studi sull'ottica geometrica) la sua natura corpuscolare. Agli inizi del 1700 la domanda era più selettiva, più specifica: "La luce è un'onda o un corpuscolo?".

A cavallo tra il 1700 e il 1800 Thomas Young verificò sperimentalmente la natura ondulatoria della luce: illuminando una barriera con due piccole fenditure ottenne su uno schermo retrostante il timbro caratteristico di un'onda: una figura di interferenza; inoltre la teoria sull'elettromagnetismo di Maxwell sembra far diradare la nebbia, portando via l'idea di una particella di luce: alla fine del 1800 la luce è un'onda.

Certo rimanevano numerosi i nodi al pettine: la catastrofe ultravioletta (UV) mai osservata, ma prevista dal modello del corpo nero (BB) ne è un esempio. Fu Max Planck il primo a sciogliere alcuni nodi, ammettendo che la radiazione assorbita e riprocessata dal BB non è emessa in modo continuo ma a pacchetti o quanti. Risolse così il problema dell'assenza della catastrofe UV; ma dobbiamo aspettare il 1905 quando un meraviglioso Albert Einstein tuona sul mondo della fisica e basandosi su argomentazioni empiriche relative all'effetto fotoelettrico conclude che la sola teoria ondulatoria non è sufficiente a spiegare le osservazioni, la luce necessita di una componente corpuscolare (Newton non sbagliava): nascono i mattoncini della luce, quanti di energia chiamati fotoni che trasportano impulso secondo la relazione relativistica di massa-shell. Nasce la tanto stramba quanto veritiera teoria duale della luce: la luce è sia un'onda che una

particella!

Se lascio passare un fotone alla volta nell'apparato di Young pian, piano i fotoni si accumulano sullo schermo retrostante e compare la figura di interferenza, la realtà si manifesta e non c'è dubbio: ogni singolo fotone deve necessariamente interferire con sé stesso, questi non passa da una sola fenditura ma da entrambe.

Premiamo rewind e percorriamo un excursus parallelo fino ad arrivare all'attuale modello di materia. La scoperta dell'elettrone, il modello atomico a panettone di Thomson, rimpiazzato da quello planetario di Rutherford danno struttura alla materia. Tuttavia anche il modello atomico di Rutherford era destinato a crollare: l'elettrone ruotando attorno al nucleo presenta un'accelerazione centripeta e secondo la teoria classica dell'elettromagnetismo avrebbe dovuto emettere radiazione, iniziando a spiraleggiare intorno fino a cadervi sopra in $10^{-8} s$, dissipando la sua energia cinetica orbitale e rendendo impossibile l'esistenza di atomi nell'universo. Si necessitava di una visione atomica alternativa; fu Niels Bohr l'uomo coraggioso che sulla base del quanto di azione di Planck costruì la struttura dell'atomo più semplice: quella dell'atomo di idrogeno. All'epoca di Bohr i fisici conoscevano l'esistenza di specifiche serie di frequenze alle quali l'atomo di idrogeno emette radiazione. Su queste basi nel 1913 Bohr ipotizzò che il momento angolare dell'elettrone orbitante fosse delle stesse dimensioni della costante di Planck, quantizzando il momento angolare. Immediatamente ne consegue la quantizzazione dei livelli di energia stazionari, zone dove l'elettrone è obbligato a vivere perdendo la possibilità di trovarsi a caso attorno al nucleo. Inoltre l'elettrone di Bohr passando da uno stato eccitato ad uno stato energetico a riposo avrebbe emesso energia sotto forma di un fotone proprio il quanto di energia, pari alla differenza tra l'energia che possedeva prima del salto e quella posseduta nella nuova orbita. Nonostante le scoperte di Bohr non si delinea una formulazione generale sulla teoria dei quanti. Bisogna aspettare le idee del duca Louis Victor de Broglie che prende l'atomo di Bohr e lo concepisce come uno strumento musicale che può emettere sia un tono di base, che una serie di armoniche: nasce l'ipotesi di de Broglie. Quello che Einstein aveva concepito sulla luce de Broglie lo concepisce sulla materia: anche la materia ha una natura duale e a volte si comporta come un'onda, altre, invece, come una particella; su queste basi il duca associa ad una particella di energia E un'onda di frequenza ν legata alla relazione di Planck

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

Come proposto da Einstein per i fotoni, anche per la materia abbiamo una relazione tra impulso e lunghezza d'onda

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

ma, mentre per i fotoni

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

per la materia

$$\nu = \frac{E}{\lambda p}$$

L'ipotesi di de Broglie rendeva atto alla quantizzazione del momento angolare dell'atomo di Bohr: l'onda elettronica che gira attorno al nucleo atomico su una circonferenza $2\pi r$ deve necessariamente avere un numero intero di λ , altrimenti si distruggerebbe per autointerferenza. L'ipotesi di de Broglie fu confermata nel 1917 da Davisson e Germer: i due inviarono un fascio di elettroni contro una struttura cristallina di nichel ottenendo figure di diffrazione ad anelli concentrici. Come per i fotoni inviando un elettrone alla volta l'annerimento sullo schermo è *quasi* localizzato ad una singola macchiolina ed il disegno di frangia si forma dopo un gran numero di lanci di elettroni. Quindi è la singola particella di materia ad essere caratterizzata da un'onda che rappresenta la probabilità di trovare la particella in punti diversi dello spazio ad essa accessibili, prima dell'impatto sullo schermo. Queste particelle vivono in uno spazio molto diverso dallo spazio-tempo einsteiniano e che la matematica ci indica come spazi di Hilbert, tuttavia, con l'atto della misura umana, esse mostrano l'evidenza di manifestarsi nello spazio-tempo portandosi, però, dietro tutti quegli effetti che studia la meccanica quantistica e che metterò in evidenza in questo elaborato.

Post Scriptum: Ho voluto introdurvi in queste righe alla nascita della teoria quantistica, piuttosto che presentare un riassunto dell'elaborato che sarà ampiamente discusso nelle prossime pagine.

”La matematica della meccanica quantistica è chiara, ma mettere in connessione questa matematica con un’immagine intuitiva del mondo fisico è molto difficile”
CLAUDE N. COHEN-TANNOUDJI

Capitolo 1

I 5 postulati della Meccanica Quantistica

1.1 Spazi di Hilbert e raggio vettore

La descrizione dei sistemi quantistici isolati si completa in 5 postulati. Prima di enunciarli è d'obbligo definire velocemente l'universo matematico di esistenza proprio del sistema quantistico: lo spazio di Hilbert.

Definizione 1. \mathcal{H} è uno spazio vettoriale sul corpo \mathbb{C} i cui elementi sono appunto vettori, che scritti nella notazione di Dirac assumono la forma:

$$|h\rangle, |f\rangle, |g\rangle, \dots \text{ ket}$$

\mathcal{H} gode di tutte le proprietà di uno spazio vettoriale:

A Somma: $\forall |f\rangle, |g\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow \exists |f\rangle + |g\rangle = |h\rangle \in \mathcal{H}$ che gode delle seguenti proprietà:

$$A_1 \text{ Elemento neutro: } \exists |e\rangle \in \mathcal{H}; |f\rangle + |e\rangle = |f\rangle$$

$$A_2 \text{ Elemento opposto: } \forall |f\rangle, \exists |-f\rangle; |f\rangle + |-f\rangle = |e\rangle$$

Da A_2 posso ricavare la sottrazione

B Prodotto per uno scalare: $\forall z \in \mathbb{C}, \forall |f\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow z|f\rangle \in \mathcal{H}$ che gode delle seguenti proprietà:

$\forall |f\rangle, |g\rangle \in \mathcal{H}$ e $\forall z \in \mathbb{C}$ si ha:

$$B_1 (|f\rangle + |g\rangle)z = z|f\rangle + z|g\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \text{ e } \forall |f\rangle \in \mathcal{H} \text{ si ha:}$$

$$B_2 (z + w)|f\rangle = z|f\rangle + w|f\rangle \in \mathcal{H}$$

B_3 Proprietà associativa: $\forall z, w \in \mathbb{C} \text{ e } \forall |f\rangle \in \mathcal{H}$ si ha:

$$z(w|f\rangle) = w(z|f\rangle) = (zw)|f\rangle \in \mathcal{H}$$

B_4 $1|f\rangle = |f\rangle \forall |f\rangle \in \mathcal{H}$

Per completare la struttura di \mathcal{H} tramite la definizione di prodotto interno si introduce il seguente isomorfismo:

$\forall |f\rangle \in \mathcal{H}$ deve \exists in \mathcal{H} un isomorfismo detto aggiunzione \dagger ; $\forall |f\rangle$ ket $\exists \langle f|$ bra, con $(|f\rangle)^\dagger := \langle f|$.

C prodotto scalare che indicheremo con $\langle g|f\rangle$ e che verifica le seguenti proprietà: $\forall |f\rangle, |g\rangle, |h\rangle \in \mathcal{H}$ e $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

$$C_1 \langle f|f\rangle \geq 0$$

$$C_2 \langle f|f\rangle = 0 \leftrightarrow |f\rangle = |e\rangle$$

$$C_3 \langle f|g\rangle (\langle g|f\rangle)^* \text{ antisimmetria}$$

$$C_4 \langle zf|g\rangle = z \langle f|g\rangle$$

$$C_5 \text{ sesquilinear property: } \langle h|(z|f\rangle + w|g\rangle) = z \langle h|f\rangle + w \langle h|g\rangle$$

$$C_6 (z \langle f| + w \langle g|) \langle h| = z^* \langle f|h\rangle + w^* \langle g|h\rangle$$

$$C_7 \text{ disuguaglianza di Schwarz: } |\langle g|f\rangle| \leq \sqrt{\langle f|f\rangle \langle g|g\rangle}$$

Da **C** segue che:

D \mathcal{H} è uno spazio normato:

$$\exists ||| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^+;$$

$$D_1 |||f\rangle|| = \sqrt{\langle f|f\rangle} \geq 0 \text{ norma positiva.}$$

$$D_2 \forall z \in \mathbb{C} |||z|f\rangle|| = |z| |||f\rangle||$$

$$D_3 \forall |f\rangle, |g\rangle \in \mathcal{H} \text{ si ha } |||f\rangle + |g\rangle|| \leq |||f\rangle|| + |||g\rangle|| \text{ (disuguaglianza triangolare)}$$

\mathcal{H} è anche uno spazio metrico (in quanto normato e dotato di prodotto interno), quindi completo. Inoltre un tale spazio può essere separabile se ha un sottoinsieme ovunque denso e numerabile. Posso quindi avere una base per \mathcal{H} le cui combinazioni lineari mi permettono di poter rappresentare ogni vettore di \mathcal{H} .

Definizione 2. Raggio in \mathcal{H} : classe di equivalenza di vettori che differiscono tra loro per una costante moltiplicativa $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

$$|\psi\rangle \simeq z|\psi\rangle.$$

1.2 Corrispondenza 1:1 tra \mathcal{H} , \mathbb{L}^2 ed l^2

$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle \leftrightarrow \mathbb{L}^2 \ni \psi(x) = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$, funzione complessa $\leftrightarrow l^2 \ni (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ complesso. Uno spazio di Hilbert di dimensione finita è isomorfo a \mathbb{C}^N .

1.3 Postulati

1.3.1 Postulato 1: gli stati di un sistema

Ad un sistema quantistico si fa corrispondere uno spazio di Hilbert (\equiv insieme di tutti i possibili stati del sistema).

A un generico stato del sistema si fa corrispondere ad un tempo fissato un vettore \in al raggio, quindi definito a meno di una costante $z \in \mathbb{C}$ (allora $|\psi\rangle$ e $z|\psi\rangle$ rappresentano lo stesso stato).

L'arbitrarietà della lunghezza di $|\psi\rangle$ permette di definire la normalizzazione a 1 come:

$$|\check{\psi}\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\| |\psi\rangle \|} \quad \text{supposto che} \quad \| |\psi\rangle \| < \infty$$

La parte reale di $|\psi\rangle$ è buona per la normalizzazione, rimane una fase inosservabile $e^{i\theta}$ che quando faccio il modulo quadro sparisce e non ha senso fisico, allora $|\psi\rangle$ e $e^{i\theta}|\psi\rangle$ rappresentano lo stesso stato fisico.

Dalla definizione di \mathcal{H} e da questo postulato ho il principio di sovrapposizione: se un sistema può stare in $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, allora può stare anche in tutti quegli stati che sono combinazione lineare dei primi due (lo vedremo meglio nel postulato 4 quando introdurrò l'equazione di Schrödinger). Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$ è uno stato del sistema.

Le onde sono sovrapposte l'una all'altra (questo principio spiega, ad esempio, l'interferenza delle onde).

1.3.2 Postulato 2: osservabili fisiche

Mentre in meccanica classica le grandezze fisicamente osservabili sono funzioni $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ che caratterizzano lo stato, in meccanica quantistica le osservabili fisiche sono operatori nello spazio di Hilbert (\hat{F}) lineari e autoaggiunti. Essi operano su uno stato $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ nel modo seguente:

$$\hat{F}|\psi\rangle = |\phi\rangle \in \mathcal{H}$$

Non tutti gli operatori in \mathcal{H} sono osservabili, per esserlo devo avere:

$\hat{F} = \hat{F}^\dagger$, che vuol dire \hat{F} deve essere autoaggiunto o hermitiano, dove \hat{F}^\dagger è, appunto, l'operatore aggiunto a \hat{F} (che invece di agire sul ket agisce sul bra).

$$\langle \phi | \hat{F} | \psi \rangle = \langle \hat{F}^\dagger \phi | \psi \rangle$$

Gli operatori hermitiani soddisfano le equazioni agli autovalori:

$$\hat{F} |k\rangle = f_k |k\rangle \quad \text{con:}$$

$|k\rangle$ = autovettori di \hat{F}

f_k = autovalori di \hat{F} (reali perché \hat{F} è hermitiano in modo da rappresentare il risultato della misura fisica).

L'insieme $\{f_k\} = \sigma(\hat{F})$ è detto spettro di \hat{F} (continuo $k \in \mathbb{R}$, discreto $k \in \mathbb{Z}$, misto).

$|k\rangle \langle k| = \hat{P}_k$ sono chiamati proiettori lungo k , infatti effettuano proiezioni ortogonali di uno stato sullo spazio degli autovettori con autovalore f_k .

Posso rappresentare \hat{F} tramite la sua decomposizione spettrale:

$$\hat{F} = \sum_k f_k |k\rangle \langle k| = \sum_k f_k \hat{P}_k = (F^\dagger)^* = \hat{F}^\dagger$$

Ad ogni osservabile si può far corrispondere uno spazio funzionale \mathbb{L}^2 (isomorfo allo spazio di Hilbert) dove possiamo rappresentare gli stati del sistema e dare forma anche agli operatori. I passaggi tra i vari spazi funzionali sono determinati dalle trasformate di Fourier.

Rappresentazione delle principali osservabili in $\mathbb{L}^2 \hat{x}$:

$$\hat{x} \longrightarrow x.$$

$$\hat{p} \longrightarrow -i\hbar \nabla$$

$$\hat{H} \longrightarrow (-i\hbar \nabla, x).$$

Teorema 1. \forall sistema quantistico \exists una base ortonormale completa comune alla base degli operatori che commutano, cioè di quelle osservabili, ad esempio \hat{H} e \hat{p} misurabili con la stessa precisione, quindi tali che:

$$[\hat{H}, \hat{p}] = \hat{H}\hat{p} - \hat{p}\hat{H} = 0$$

Ne consegue che esiste un principio di indeterminazione \forall coppia di osservabili che non commutano, un esempio è il principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$$

Questo vuol dire che non posso conoscere con la stessa precisione x e p , o per meglio dire non posso effettuare le due misure contemporaneamente perché se misuro prima x e poi p ottengo un risultato diverso che se misurassi prima p e poi x . Perdo il concetto di traiettoria: se so dove sono, non so dove vado. Più la misura su x è precisa e più è basso il grado di precisione su p e viceversa. L'atto della misura è ciò che causa l'indeterminismo.

1.3.3 Postulato 3: misure e probabilità

L'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica è stata ufficialmente proposta da Max Born. Possiamo parlare dello stato del sistema quantistico, rispetto a una certa osservabile, solo in termini di probabilità (o in presenza di più sistemi possiamo solo sapere quale percentuale di un grande numero di sistemi potrà essere individuata in un certo stato dell'osservabile considerata). Quando il fisico opera una misura tramite un'osservabile \hat{F} su un sistema nel generico stato $|\psi\rangle$ fa "collassare" il sistema in uno degli autostati $|k\rangle$ di \hat{F} (ovvero proietta $|\psi\rangle$ su un autovettore $|k\rangle$ dell'osservabile considerata, che non è uno stato sovrapposto) ed il risultato della misura è l'autovalore f_k corrispondente all'autostato $|k\rangle$. La cosa importante è che non posso sapere con certezza in quale tra gli autostati di \hat{F} collasserà il sistema, ma solo stimarne le probabilità, che in genere saranno:

$$\mathcal{P}_k = \left\| \hat{P}_k |\psi\rangle \right\|^2 = \langle \psi | \hat{P}_k | \psi \rangle$$

Distinguiamo 3 casi per il calcolo di \mathcal{P}_k :

- Autovalori non degeneri e discreti: $\mathcal{P}_k = |\langle k | \psi \rangle|^2$
- Autovalori degeneri e discreti: $\mathcal{P}_k = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle k_i | \psi \rangle|^2$
con $\{|k_i\rangle\}$ base ortonormale dell'autospazio f_k e g_k grado di degenerazione di f_k
- Autovalori continui (caso generico): $\rho(k) = |\langle k | \psi \rangle|^2$ densità di probabilità, quindi la probabilità che il sistema si trovi tra $f(k)$ ed $f(k) + dk$ sarà:
 $\rho(k)dk = |\langle k | \psi \rangle|^2 dk$

Se $\sigma(\hat{F})$ è discreto allora ho la quantizzazione. Se in seguito al collasso di $|\psi\rangle$ in $|k\rangle$ effettuo un'altra misura immediatamente successiva a quella che ha provocato il collasso ottengo con $\mathcal{P} = 1$ f_k corrispondente a $|k\rangle$.

Se ho un insieme di sistemi identici ognuno nello stato $|\psi\rangle$ allora se opero una misura con \hat{F} il valore di aspettazione della misura sarà:

$$\langle \hat{F} \rangle = \sum_k f_k \mathcal{P}_k = \sum_k f_k \langle \psi | P_k | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle$$

Un esempio pratico per spiegare ciò che sto descrivendo è uno studente che deve sostenere un esame: prima che lo studente sostenga l'esame possiamo solo stimare la probabilità che egli cada nell'autostato promosso o bocciato, in effetti si trova in una sovrapposizione, cioè è ancora sia promosso che bocciato. Solo dopo una misura da parte del suo insegnante potrà cadere in uno stato definito (promosso o bocciato) con un determinato autovalore: il suo voto. Possiamo dire che è la misura che modifica

drasticamente il suo stato.

Faccio infine notare che data un'osservabile \hat{F} ed una sua diagonalizzazione, se non ho degenerazione ho un sistema ortonormale di autovettori (base di \hat{F}) che sono anche una base per lo spazio di Hilbert del sistema descritto da \hat{F} . Se ho degenerazione devi introdurre altre osservabili che commutano con la prima (devono commutare perché devono descrivere lo stesso spazio di Hilbert per il sistema); questo implica che lo stesso sistema di autovettori di \hat{F} saranno una base anche per le ICOC e i diversi autovalori delle ICOC presenteranno, in corrispondenza degli autovalori degeneri di \hat{F} , autospazi di $\dim = 1$ rompendo la degenerazione.

1.3.4 Postulato 4: dinamica, evoluzione: equazione di Schrödinger

L'obiettivo di Schrödinger è stato quello di trovare un'equazione che governasse l'evoluzione delle onde di particelle teorizzate da de Broglie. Con la sua equazione Schrödinger fece fare alla meccanica quantistica il salto di qualità, i fisici potevano finalmente avere a che fare con una funzione d'onda che è soluzione dell'equazione stessa. L'equazione di Schrödinger è un'equazione lineare del primo ordine nel tempo e del secondo nelle coordinate. La linearità di questa equazione fa sì che le sue soluzioni siano lineari: nasce così il principio di sovrapposizione (descritto nel postulato 1). essa determina l'evoluzione temporale di uno stato $|\psi(t)\rangle$. Lavorando nello spazio delle coordinate $\mathbb{L}^2\hat{x}$ si hanno le seguenti forme per l'equazione:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) \quad \text{particella libera}^1 \quad (1.1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t) \quad (1.2)$$

La 1.2 rappresenta l'equazione per una particella in un campo di forze conservativo. La 1.2 scritta con il formalismo degli spazi di Hilbert diventa:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.3)$$

Si ha che uno stato normalizzato ad un tempo t resta normalizzato nel tempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 0 \leftrightarrow \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = ||\psi(t)\rangle|^2 = \text{cost} \quad \forall t$$

¹Dove $\psi(x, t) = \langle x | \psi \rangle$ = Funzione d'onda, cioè lo stato $|\psi\rangle$ rappresentato in $\mathbb{L}^2\hat{x}$ (o proiettato su un autostato dell'operatore \hat{x})

$|\psi(x, t)|^2$ è la densità di probabilità di trovare la particella in x al tempo t

$|\psi(x, t)|^2 \in \mathbb{C}$ è monodroma, ovunque limitata $|\psi(x, t)|^2 < \infty$ e derivabile rispetto a x e t

Infatti $|\psi(t)\rangle \equiv \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$

Allora introduciamo l'operatore di evoluzione temporale $\hat{U}(t, t_0)$ che applicato allo stato $|\psi(t=0)\rangle$ fa evolvere lo stato all'istante successivo $|\psi(t)\rangle$:

$$\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle$$

$\hat{U}(t, t_0)$ è un operatore unitario e conserva la norma:

$$U^\dagger U = \mathbb{1} \leftrightarrow U^\dagger = U^{-1} \quad \text{ed ho:}$$

$$\langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | U^\dagger U | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$$

Si dimostra che:

- $\hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \hat{U}(t', t_0)$ sistema non isolato (\hat{H} dipende da t)
- $\hat{U}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t, t_0)\right)$ sistema isolato (\hat{H} indipendente da t)

che soddisfa

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = \hat{H} U(t, t_0)$$

Si ha che:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi(t_0)\rangle$$

U trasforma in sé stesso tutto lo spazio di Hilbert.

Un aspetto importantissimo è che l'equazione di Schrödinger è deterministica, una volta che conosco lo stato iniziale posso conoscere tutta la sua evoluzione. L'indeterminismo quantistico nasce dall'atto di misura: è la misura che causa il principio di indeterminazione e che ha una natura probabilistica del suo risultato.

L'equazione di Schrödinger viene utilizzata per risolvere ogni specifico problema della meccanica quantistica, essa sarà specifica in base alle diverse hamiltoniane. Faccio notare che la 1.1 rappresenta in meccanica quantistica quello che $E = p^2/2m$ rappresenta in fisica classica. Se ho un sistema a N gradi di libertà descritto dalle coordinate lagrangiane q_i e dai momenti coniugati p_i si ha in $\mathbb{L}^2 \hat{q}$ che l'equazione diventa:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = H\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, q, t\right) \psi(q, t)$$

Se \hat{H} non dipende esplicitamente da t fattorizzo $\psi(q, t)$:

$$\Psi(q, t) = \psi(q) \phi(t)$$

e si hanno due problemi agli autovalori:

$$\mathbf{A} \quad i\hbar \dot{\Phi} = E \Phi(t) \leftrightarrow \Phi(t) = A e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

B $\hat{H}\psi_{n(k)}(q) = E_n\psi_{n(k)}(q)$ equazione di Schrödinger stazionaria

$\sigma(\hat{H}) = \{E_n\}$ = energia totale dello stato $|\psi\rangle$ Dove con l'indice (k) indico possibili degenerazioni di E_n , risolte dalle ICOC.

Si ha:

$$\psi_n(q) = \sum_k A_{n(k)}\psi_{n(k)}(q)$$

E lo stato totale è dato dalla sovrapposizione degli autostati di definita energia:

$$\Psi(q, t) = \sum_n B_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(q)$$

Scritto in \mathcal{H} :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n B_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |\psi_n(t)\rangle$$

1.3.5 Postulato 5: sistemi composti

Se lo stupore che lasciano addosso i primi 4 postulati non fosse sufficiente, il quinto postulato farà letteralmente sbiancare il lettore. Da questo postulato, infatti, discende il fenomeno dell'entanglement.

Dato un sistema $A \cup B$ composto da due sottoparti A e B , con:

\mathcal{H}_A = spazio di Hilbert degli stati di A

\mathcal{H}_B = spazio di Hilbert degli stati di B

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ = spazio di Hilbert degli stati del sistema composto AB

Se il sistema A è preparato nello stato $|\psi\rangle_A$ ed il sistema B nello stato $|\phi\rangle_B$ allora lo stato del sistema composto AB sarà:

$$|\psi, \phi\rangle_{AB} \equiv |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$$

Ricordo che, date:

$\{|i\rangle_A\}$ = Base di \mathcal{H}_A

$\{|\mu\rangle_B\}$ = Base di \mathcal{H}_B

Allora il prodotto tensoriale agisce in modo che:

Gli stati $|i, \mu\rangle_{AB} = |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B$ sono una base per $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, cioè una base per il sistema composto. Dove il prodotto interno ad $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ è definito così:

$$\langle i, \mu | j, \nu \rangle_{AB} = \delta_{ij} \delta_{\mu\nu}$$

In $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ agisce l'operatore $\hat{M}_A \otimes \hat{N}_B$: operatore che applica \hat{M}_A ad A ed \hat{N}_B a B :

$$\hat{M}_A \otimes \hat{N}_B |i, \mu\rangle_{AB} = \hat{M}_A |i\rangle_A \otimes \hat{N}_B |\mu\rangle_B$$

In $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ se vogliamo far agire un operatore banalmente su una sottoparte ci muoviamo così, definiamo:

$\widehat{\mathbb{1}}_A \otimes \widehat{N}_B =$ operatore che agisce banalmente su A

$\widehat{M}_A \otimes \widehat{\mathbb{1}}_B =$ operatore che agisce banalmente su B .

Vedremo nei capitoli successivi le forti implicazioni che il postulato n.5 comporta.

*"Bisogna innamorarsi di una teoria e, come per una donna,
questo è possibile solo se non la si capisce completamente"*
RICHARD PHILLIPS FEYNMAN

Capitolo 2

Formalismo dei sistemi puri e dei sistemi miscelati

2.1 Probabilità estrinseca; introduzione alla miscela

Un insieme di N sistemi preparato in modo identico nello stesso stato $|\psi\rangle$ è descritto dal solo ket $|\psi\rangle$ (che potrà eventualmente essere uno stato sovrapposto, senza ripercussioni sulla descrizione del sistema fornito sopra). Allora $|\psi\rangle$ costituisce la massima informazione possibile che si può avere riguardo il sistema (*caso puro*).

Quando un insieme di sistemi fisici non può essere descritto da un singolo ket, allora lo stato complessivo del sistema è conosciuto in modo probabilistico.

Un esempio è un fascio atomico preparato con due diversi apparati di Stern-Gerlach, di cui una certa percentuale abbia spin orientato nel verso positivo dell'asse z e la rimanente parte in verso opposto.

Bisogna capire che in questo caso oltre al carattere intrinseco probabilistico legato al processo di misura, abbiamo anche una componente probabilistica estrinseca riconducibile alla nostra impossibilità di conoscere sufficientemente lo stato del sistema, ovvero abbiamo una mancanza di informazione sul sistema esterna alla natura probabilistica della meccanica quantistica (*caso della miscela*).

Vediamo in seguito come la meccanica quantistica ottimizza questa mancanza di informazione tramite il formalismo quantistico.

2.2 Sistemi miscelati: miscela statistica di stati

Esaminiamo il caso della mancanza di informazione estrinseca alla natura quantistica del sistema. È questo il caso di un sistema quantistico formato da N particelle

che non sono preparate tutte nello stesso stato, quindi non conosciamo lo stato globale del sistema, ma solo le probabilità che il sistema possa trovarsi in certi stati: **Miscela statistica di stati o ensemble** $S := \{|\varphi_1\rangle, p_1; |\varphi_2\rangle, p_2; \dots; |\varphi_k\rangle, p_k; \dots\}$

Le probabilità p_k sono di natura statistica, non quantistica, ed in ogni caso dovranno rispettare la relazione:

$$\sum_k p_k = 1$$

Per effettuare una misura sul sistema con una certa osservabile dobbiamo tenere conto dei due diversi livelli di probabilità:

- Probabilità quantistica
- Probabilità statistica

Assumiamo nella trattazione gli stati della miscela normalizzati (preciso che non è detto che siano ortogonali tra loro, anche se nella trattazione a seguire li consideriamo tali). Inoltre faccio notare che una miscela tende al caso puro quando tutti i p_k sono uguali a 0 ad eccezione di uno che sarà pari a 1, allora avremo la massima informazione e lo stato del sistema sarà noto.

2.3 Differenza tra uno stato puro sovrapposto e una miscela

Un sistema miscelato

$$S := \{|\varphi_1\rangle, p_1; |\varphi_2\rangle, p_2; \dots; |\varphi_k\rangle, p_k; \dots\} \quad (2.1)$$

non deve essere confuso con un sistema in uno stato puro sovrapposto descritto dall'unico stato

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\varphi_k\rangle \quad (2.2)$$

Quando effettuo una misura su 2.2 con un'osservabile, che ha $|\varphi_k\rangle$ come uno dei suoi autovettori, avrò che la probabilità che la mia misura sia pari all'autovalore corrispondente all'autostato $|\varphi_k\rangle$ è $|c_k|^2$, ottenuta da:

$$c_k = \langle \varphi_k | \psi \rangle = \langle \varphi_k | \sum_k c_{k'} |\varphi_{k'}\rangle = \sum_k c_{k'} \langle \varphi_k | \varphi_{k'} \rangle = \sum_k c_{k'} \delta_{kk'} = c_k$$

Invece in un sistema miscelato se effettuo una misura, con la stessa osservabile del caso puro, avrò che la probabilità di ottenere l'autovalore corrispondente all'autostato $|\varphi_k\rangle$

sarà dato dalla somma delle singole probabilità quantistiche degli stati della miscela proiettati su $|\varphi_k\rangle$ (cioè $|\beta_1|^2 = |\langle\varphi_k|\varphi_1\rangle|^2$, $|\beta_2|^2 = |\langle\varphi_k|\varphi_2\rangle|^2$, ecc) pesati sui vari p_k statistici estrinseci alla misura quantistica. Questa distinzione ha delle conseguenze importantissime che differenziano in modo chiaro e netto uno stato sovrapposto da una miscela:

- in uno stato sovrapposto si ottengono termini di interferenza $c_k c_{k'}^*$, che sono testimonianza del fatto che le diverse componenti possono interferire tra loro, ovvero lo stato puro può interferire con sé stesso. La presenza di questi termini di interferenza sta alla base dell'entanglement.
- Nei sistemi miscelati non troviamo termini di interferenza tra i vari stati della miscela.

Esempio:

consideriamo una miscela di due stati:

$$S := \{|\varphi_1\rangle, p_1; |\varphi_2\rangle, p_2\} \quad (2.3)$$

e il "corrispondente" stato sovrapposto $|\psi\rangle$ (normalizzato, quindi tale che $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$):

$$|\psi\rangle = \lambda_1 |\varphi_1\rangle + \lambda_2 |\varphi_2\rangle \quad (2.4)$$

con $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$ ortonormali: $\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = \delta_{12}$

Detto a_n un autovalore non degenere dell'osservabile \hat{A} e $|a_n\rangle$ l'autovettore ad esso associato, se faccio una misura con l'osservabile \hat{A} prima sulla miscela, poi sullo stato sovrapposto, ho che le probabilità di ottenere a_n saranno:

Caso 2.3 miscela:

- Se il sistema si trova nello stato $|\varphi_1\rangle$, allora la probabilità che una misura di \hat{A} mi dia a_n è:

$$\mathbf{A} \quad \mathcal{P}_1(a_n) = |\langle a_n|\varphi_1\rangle|^2$$

- Se il sistema si trova nello stato $|\varphi_2\rangle$, allora la probabilità che una misura di \hat{A} mi dia a_n è:

$$\mathbf{B} \quad \mathcal{P}_2(a_n) = |\langle a_n|\varphi_2\rangle|^2$$

e la probabilità di avere come esito a_n da una misura di \hat{A} sul sistema miscelato è data dalla media pesata di $\mathcal{P}_1(a_n)$, $\mathcal{P}_2(a_n)$ con pesi statistici $p_1 := |\lambda_1|^2$ e $p_2 := |\lambda_2|^2$.

$$\mathcal{P}_{mis}(a_n) = p_1 \mathcal{P}_1(a_n) + p_2 \mathcal{P}_2(a_n) = |\lambda_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2 \mathcal{P}_2(a_n) \quad (2.5)$$

Caso 2.4 stato sovrapposto:

La probabilità di ottenere a_n tramite una misura di \hat{A} su $|\psi\rangle$ è:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{sovrapp}(a_n) &= |\langle a_n | \psi \rangle|^2 = |\langle a_n | \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle|^2 \\ &= |\lambda_1 \langle a_n | \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle a_n | \varphi_2 \rangle|^2 \\ &= |\lambda_1|^2 |\langle a_n | \varphi_1 \rangle|^2 + |\lambda_2|^2 |\langle a_n | \varphi_2 \rangle|^2 + 2\text{Re}[\lambda_1 \lambda_2^* \langle a_n | \varphi_1 \rangle \langle a_n | \varphi_2 \rangle^*]\end{aligned}$$

Sappiamo che se il sistema si trova nello stato $|\psi\rangle$ la probabilità di trovarlo in $|\varphi_1\rangle$ sarà: $p_1 = |\langle \varphi_1 | \psi \rangle|^2 = |\lambda_1|^2$ e in $|\varphi_2\rangle$ sarà: $p_2 = |\langle \varphi_2 | \psi \rangle|^2 = |\lambda_2|^2$ e tenendo conto di **A** e **B** ho:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{sovrapp}(a_n) &= |\lambda_1|^2 \mathcal{P}_1(a_n) + |\lambda_2|^2 \mathcal{P}_2(a_n) + 2\text{Re}[\lambda_1 \lambda_2^* \langle a_n | \varphi_1 \rangle \langle a_n | \varphi_2 \rangle^*] \\ &= \mathcal{P}_{mis}(a_n) + 2\text{Re}[\lambda_1 \lambda_2^* \langle a_n | \varphi_1 \rangle \langle a_n | \varphi_2 \rangle^*]\end{aligned}$$

Quindi $\mathcal{P}_{sovrapp}$ differisce da \mathcal{P}_{mis} per il termine di interferenza $2\text{Re}[\lambda_1 \lambda_2^* \langle a_n | \varphi_1 \rangle \langle a_n | \varphi_2 \rangle^*]$, ergo una miscela di stati non è equivalente ad una loro combinazione lineare e quindi non è descrivibile con un vettore di stato medio della miscela (che si rappresenterebbe con una sovrapposizione). Il metodo 2.5 per descrivere la miscela non è sempre banale e l'impossibilità di descrizione della stessa tramite uno stato medio ci porta a definire un nuovo ente che permetterà di maneggiare con fluidità la miscela. Questo operatore sarà l'operatore densità. Preciso, però, che esso non è definibile solo per la miscela, ma anche per il caso puro.

2.4 Operatore densità per un sistema in uno stato puro

Consideriamo lo stato puro già normalizzato $|\psi\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |e_n\rangle^1$$

Con $\{|e_n\rangle\}_{n \in \mathbb{Z}}$ base discreta, ortonormale dello spazio degli stati e con:

1 $\sum_n |c_n(t)|^2 = 1$ che esprime la normalizzazione $|\psi(t)\rangle$ e il fatto che il sistema deve trovarsi necessariamente da qualche parte negli $\{|e_n\rangle\}$ (conservazione della probabilità).

Data un'osservabile \hat{A} agente su $|\psi\rangle$, lo stato sarà completamente descritto se conosco:

2 $\langle \hat{A} \rangle(t)$, infatti date le componenti della matrice associata ad \hat{A} (cioè le ampiezze di probabilità di transizione da $|e_p\rangle$ ad $|e_n\rangle$ causata da \hat{A}):

$$\langle e_n | \hat{A} | e_p \rangle = a_{n,p}$$

¹gli $|e_n\rangle$ non sono gli elementi neutri del capitolo 1, ma una base generica dello spazio degli stati

allora il valor medio di \hat{A} su $|\psi\rangle$ (o valore di aspettazione) all'istante t sarà:

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle (t) &= \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \left(\sum_n c_n^*(t) \langle e_n | \sum_p c_p(t) | e_p \rangle \right) = \\ &= \sum_{n,p} c_n^*(t) a_{n,p} c_p(t) \langle e_n | e_p \rangle = \sum_{n,p} c_n^*(t) c_p(t) a_{n,p} \delta_{n,p} = \\ &= \sum_n c_n^*(t) c_n(t) a_n\end{aligned}$$

3 l'evoluzione temporale dello stato $|\psi(t)\rangle$ descritta dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$$

4 la probabilità di ottenere a_n da una misura su $|\psi(t)\rangle$ con \hat{A} :

$\mathcal{P}(a_n)(t) = \langle \psi(t) | \hat{P}_n | \psi(t) \rangle$ con \hat{P}_n = proiettore lungo gli elementi della base di \hat{A} .

Vogliamo rendere accessibili all'operatore densità questi 4 aspetti.

Notiamo da **2** che $c_n^*(t) c_n(t) = |c_n(t)|^2$ è la probabilità che una misura di \hat{A} mi dia a_n o in modo alternativo da $c_n = \langle e_n | \psi(t) \rangle$ si ha $c_n^* c_p = \langle \psi(t) | e_n \rangle \langle e_p | \psi(t) \rangle$ dove individuando $|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$, cioè il proiettore sulla direzione unica definita dal ket $|\psi(t)\rangle$ si ha che $c_n^* c_p$ diventano i suoi elementi.

Chiamiamo:

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad \textbf{OPERATORE DENSITÀ DEL CASO PURO}$$

e nella base $\{|e_n\rangle\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è rappresentato da una matrice, detta matrice densità i cui elementi sono

$$\textbf{A} \quad \rho_{n,p} := \langle e_p | \hat{\rho}(t) | e_n \rangle = \langle e_p | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | e_n \rangle = c_n^* c_p$$

Non ci resta altro che scrivere **1**, **2**, **3** e **4** in termini di $\hat{\rho}(t)$ in modo che la descrizione dello stato sia garantita dal solo utilizzo di $\hat{\rho}(t)$:

1':

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = \sum_n c_n^* c_n = \sum_n p_n(t) = \text{Tr} \hat{\rho}(t) = 1$$

Quindi la richiesta di **1** si traduce nella richiesta che la matrice densità abbia traccia unitaria.

2':

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle (t) &= \sum_{n,p} c_n^*(t) c_p(t) a_{n,p} \delta_{n,p} = \sum_{n,p} \langle e_p | \hat{\rho}(t) | e_n \rangle \langle e_n | \hat{A} | e_p \rangle \delta_{n,p} \\ &= \sum_p \langle e_p | \hat{\rho}(t) \hat{A} | e_p \rangle = \sum_p \hat{A} \rho_{n,p} = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \hat{A} \}\end{aligned}$$

3' ricaviamo l'equazione che regola l'evoluzione temporale di $\hat{\rho}(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| - \frac{1}{i\hbar} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \hat{H}(t) \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|] = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]\end{aligned}$$

4' ricavo la probabilità di ottenere a_n da una misura di \hat{A} su $|\psi(t)\rangle$: viene fuori come un valore del proiettore \hat{P}_n lungo gli elementi della base di \hat{A} :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(a_n)(t) &= \langle \psi(t) | \hat{P}_n | \psi(t) \rangle = \sum_n c_n^*(t) c_p(t) p_{n,p} \delta_{n,p} \\ &= \sum_{n,p} \langle e_p | \hat{\rho}(t) | e_n \rangle \langle e_n | \hat{P}_n | e_p \rangle = \sum_p \langle e_p | \rho(t) \hat{P}_n | e_n \rangle \\ &= \sum_p P_n \rho_{n,p} = Tr \{ \hat{\rho}(t) \hat{P}_n \}\end{aligned}$$

Ricapitolando ho i seguenti risultati:

- 5** $Tr(\hat{\rho}(t)) = 1$ conservazione della probabilità
- 6** $\langle \hat{A} \rangle(t) = Tr(\hat{A} \hat{\rho}(t)) = Tr(\hat{\rho}(t) \hat{A})$ valore di aspettazione di un'osservabile \hat{A}
- 7** $i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]$ evoluzione temporale di $\hat{\rho}(t)$
- 8** $\mathcal{P}(a_n)(t) = Tr(\hat{P}_n, \hat{\rho}(t))$ probabilità che una misura tramite \hat{A} su $|\psi(t)\rangle$ mi dia a_n

Proprietà di $\hat{\rho}(t)$ del caso puro:

- $\rho(t) = \rho^\dagger(t)$, cioè $\rho(t)$ è autoaggiunto o hermitiano; infatti:

$$\begin{aligned}\langle \phi_1 | \hat{\rho}(t) | \phi_2 \rangle &= \langle \phi_1 | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \phi_2 \rangle = \left(\langle \psi(t) | \phi_1 \rangle \langle \phi_2 | \psi(t) \rangle \right)^* \\ &= \left(\langle \phi_2 | \hat{\rho}(t) | \phi_1 \rangle \right)^* = \langle \hat{\rho}(t) | \phi_1 | \phi_2 \rangle\end{aligned}$$

- $\hat{\rho}(t)^2 = \rho(t)$, infatti:

$$\hat{\rho}(t)^2 | \phi \rangle = | \psi(t) \rangle \underbrace{\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle}_{=1} \langle \psi(t) | \phi \rangle = | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \phi \rangle = \hat{\rho}(t) | \phi \rangle$$

- $Tr \hat{\rho}(t)^2 = 1$

Le ultime 2 proprietà valgono solo nel caso puro.

Per concludere il paragrafo voglio mettere in evidenza i vantaggi dell'utilizzo di $\hat{\rho}(t)$: notiamo in primis che ai due stati $|\psi(t)\rangle$ ed $e^{i\theta}|\psi(t)\rangle$ è associato lo stesso operatore $\hat{\rho}(t)$ (infatti $|\psi(t)\rangle$ ed $e^{i\theta}|\psi(t)\rangle$ rappresentano lo stesso stato), quindi l'utilizzo di $\hat{\rho}(t)$ ci permette di eliminare problemi relativi alla fase globale di uno stato, inoltre la **5**, **6** e **8** sono lineari, mentre non lo sono in termini di $|\psi(t)\rangle$.

2.5 Operatore densità per un sistema miscelato

Consideriamo un sistema in una miscela statistica:

$$S := \{|\varphi_1\rangle, p_1; |\varphi_2\rangle, p_2; \dots; |\varphi_k\rangle, p_k; \dots\}$$

con le condizioni sulle p_k :

$$\begin{cases} 0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k, \dots \leq 1 \\ \sum_k p_k = 1 \end{cases}$$

Detto \hat{A} un'osservabile con $\sigma(\hat{A}) = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$

Sia $\mathcal{P}^{(k)}(a_n)$ la probabilità di ottenere a_n da una misura di \hat{A} su $|\varphi_k\rangle$, ammesso che il sistema si trovi proprio in $|\varphi_k\rangle$ e la probabilità di ottenere a_n quando la misura è eseguita su tutti gli stati della miscela è:

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_k p_k \mathcal{P}^{(k)}(a_n) \quad (2.6)$$

Con

$$\mathcal{P}^{(k)}(a_n) = \langle \varphi_k | \hat{P}_n | \varphi_k \rangle = \left\| \hat{P}_n | \varphi_k \rangle \right\|^2 = \text{Tr} \{ \hat{\rho}_k \hat{P}_n \} \quad (2.7)$$

Con $\hat{\rho}_k = |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$ operatore densità corrispondente allo stato $|\varphi_k\rangle$ Sostituisco la 2.7 nella 2.6 ed ho:

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_k p_k \text{Tr}(\hat{\rho}_k \hat{P}_n) = \text{Tr} \left\{ \sum_k p_k \hat{\rho}_k \hat{P}_n \right\} = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{P}_n \} = \langle \hat{P}_n \rangle$$

Con $\hat{\rho} = \sum_k p_k \hat{\rho}_k = \sum_k p_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$ **OPERATORE DENSITÀ DEL SISTEMA MISCELATO**

L'operatore densità di una miscela lo si può interpretare come una sovrapposizione di matrici densità di stati puri, con pesi reali non negativi probabilistici. Quindi ad ogni matrice densità $\hat{\rho}_k$ è associata la sua probabilità p_k tramite una distribuzione di

probabilità classica definita dagli stessi p_k . Se il sistema si trova nello stato $|\varphi_k\rangle$ il valor medio di \hat{A} è:

$$\langle \hat{A} \rangle_k = \langle \varphi_k | \hat{A} | \varphi_k \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_k \hat{A})$$

ed il valor medio di \hat{A} sulla miscela sarà:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \sum_k p_k \langle \hat{A} \rangle_k = \sum_k a_n \mathcal{P}(a_n) = \sum_{n,k} p_k \mathcal{P}^{(k)}(a_n) a_n = \\ &= \sum_k p_k \sum_n \mathcal{P}^{(k)}(a_n) a_n = \sum_k p_k \langle \hat{A} \rangle_k = \sum_k p_k \text{Tr}(\hat{\rho}_k \hat{A}) = \\ &= \text{Tr} \left(\sum_k p_k \hat{\rho}_k \hat{A} \right) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \end{aligned}$$

Ricaviamo l'evoluzione temporale di $\hat{\rho}$. Se il sistema all'istante t_0 ha probabilità p_k di stare in $|\varphi_k(t_0)\rangle = |\varphi_k\rangle$ ad un istante successivo t ha ancora p_k di trovarsi in $|\varphi_k(t)\rangle$. Partiamo dall'equazione di Schrödinger per $|\varphi_k(t)\rangle$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi_k(t)\rangle = \hat{H}(t) |\varphi_k(t)\rangle$$

Dove all'istante t avrò:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_k(t) &= |\varphi_k(t)\rangle \langle \varphi_k(t)| \\ \text{e } \hat{\rho}(t) &= \sum_k p_k \hat{\rho}_k(t) \end{aligned}$$

Dalla **7** del caso puro $\rho_k(t)$ è governata dall'equazione

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}_k(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}_k(t)]$$

Ed ho:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \sum_k p_k \frac{d}{dt} \hat{\rho}_k(t) = \sum_k p_k \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}_k(t)] = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \sum_k p_k \hat{\rho}_k(t)] = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]$$

Infine verifichiamo la conservazione della probabilità:

$$\text{Tr} \rho = \sum_k p_k \text{Tr} \hat{\rho}_k = \sum_k p_k = 1$$

Proprietà di $\hat{\rho}$ della miscela:

- $\hat{\rho}(t)$ è hermitiano e definito > 0 , infatti $\hat{\rho}$ è una combinazione lineare di operatori hermitiani ed ho:

$$\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle = \langle \phi | \sum_k p_k \rho_k | \phi \rangle = \left\langle \phi \left| \left(\sum_k p_k \langle \varphi_k | \phi \rangle \varphi_k \right) \right. \right\rangle = \sum_k p_k |\langle \varphi_k | \phi \rangle|^2 \geq 0$$

- gli autovalori $\{\pi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ di $\hat{\rho}$ sono tali che $0 \leq \pi_k \leq 1 \forall k$

Faccio notare che la grande differenza dal caso puro è che nel caso della miscela non valgono le:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^2 &= \hat{\rho} \quad \text{ma} \quad \hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho} \\ \text{Tr} \rho^2 &= 1 \quad \text{ma} \quad \text{Tr} \rho^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che anche un sistema miscelato può essere descritto dall'operatore densità.

Vogliamo, a questo punto capire il significato fisico degli elementi matriciali ρ_{np} di $\hat{\rho}$ nella base $\{|e_n\rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$ che descrive l'espansione di ogni stato della miscela $(|\varphi_k\rangle = \sum_k c_n^{(k)} |e_n\rangle \forall k)$

Focalizziamoci sugli elementi diagonali di $\hat{\rho}$:

$$\rho_{n,n} = \langle e_n | \hat{\rho} | e_n \rangle = \sum_k p_k \langle u_n | \hat{\rho}_k | u_n \rangle = \sum_k p_k [\hat{\rho}_k]_{n,n} \quad (2.8)$$

$[\rho_k]_{n,n}$ può essere considerata come l'elemento matriciale dell'operatore densità di un caso puro ed allora si ha:

$$[\rho_k]_{n,n} = c_n^{(k)*} c_n^{(k)} = |c_n^{(k)}|^2$$

Allora 2.8 diventa:

$$\rho_{n,n} = \sum_k p_k |c_n^{(k)}|^2$$

Dove $c_n^{(k)} = \langle e_n | \varphi_k \rangle$ = probabilità di trovare con una misura il sistema nello stato $|e_n\rangle$ a patto che lo stato iniziale della miscela sia $|\varphi_k\rangle$. Nella realtà, però, essendo in presenza d una miscela non sappiamo quale sia lo stato del sistema prima della misura, allora i $\rho_{n,n}$ sono uguali alla probabilità media di trovare il sistema nello stato $|e_n\rangle$ e sono detti *popolazione dello stato $|e_n\rangle$* . Se effettuiamo una misura N volte, a partire da condizioni iniziali identiche, avremo $N\rho_{n,n}$ sistemi nello stato $|e_n\rangle$.

Consideriamo gli elementi non diagonali:

$$\rho_{n,p} = \langle e_p | \hat{\rho} | e_n \rangle = \sum_k p_k \langle e_p | \hat{\rho}_k | e_n \rangle = \sum_k [\hat{\rho}_k]_{n,p} = \sum_k p_k c_n^{(k)} c_p^{(k)*}$$

$c_n^{(k)} c_p^{(k)*}$ = termine di interferenza che può apparire solo quando $|\varphi_k\rangle$ è una combinazione lineare di $|e_n\rangle$ ed $|e_p\rangle$

$\rho_{n,p}$ sono la media pesata dei termini di interferenza fatta su tutti i possibili stati della miscela e sono chiamati *coerenze*.

Mentre le popolazioni sono sempre $\rho_{n,n} \geq 0$, $= 0$ se e solo se tutti i $|c_n^{(k)}|^2 = 0$, le $\rho_{n,p}$ possono essere $= 0$ anche se nessuno dei prodotti $c_n^{(k)} c_p^{(k)*}$ lo è (in quanto sono le $\rho_{n,p}$ sono somme di numeri complessi).

$\rho_{n,p} = 0 \Rightarrow$ effetti di interferenza tra $|e_n\rangle$ ed $|e_p\rangle$ sono nulli.

$\rho_{n,p} \neq 0 \Rightarrow$ ho un certo livello di coerenza tra gli stati $|e_n\rangle$ ed $|e_p\rangle$.

"Dio ha inserito un'arte segreta nelle forze di natura in modo da consentire a quest'ultima di modellarsi passando dal caos a un perfetto sistema del mondo"
IMMANUEL KANT

Capitolo 3

L'algebra di \hat{J}

3.1 \hat{J} : un momento angolare astratto

In meccanica quantistica si usa definire il momento angolare come un ente vivente nello spazio di Hilbert, esso sarà rappresentato da un operatore hermitiano che chiamiamo \hat{J} . L'algebra di \hat{J} , nello spazio astratto di Hilbert, prende forma in termini di commutatori da cui si manifestano le regole di quantizzazione e la nozione di un nuovo momento angolare non spaziale, che non ha un corrispettivo classica cui si dà il nome di spin.

Ricordo, che essendo un momento angolare, \hat{J} deve essere tridimensionale ed indichiamo con i, j, k le sue componenti lungo tre assi.

Si hanno le seguenti regole di quantizzazione su \hat{J} :

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\varepsilon_{i,j,k}\hat{J}_k$$

Questo significa che \hat{J}_i e \hat{J}_j non possono essere diagonalizzati simultaneamente, ovvero ha senso misurare una sola componente per volta. Invece, una qualunque tra le componenti di \hat{J} commuta con \hat{J}^2 :

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_k] = 0$$

Quindi si usa misurare simultaneamente \hat{J}^2 ed una \hat{J}_i (in genere si sceglie \hat{J}_k che $\equiv \hat{J}_3$) e si procede con una diagonalizzazione simultanea. Si introducono gli operatori non hermitiani \hat{J}_+ e \hat{J}_- :

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_1 + i\hat{J}_2 \quad \text{operatore di innalzamento}$$

$$\hat{J}_- = \hat{J}_1 - i\hat{J}_2 \quad \text{operatore di abbassamento}$$

con:

$$(\hat{J}_\pm)^\dagger = \hat{J}_\mp$$

Tali che:

$$\begin{aligned}[\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= 2\hat{J}_3 \\ [\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] &= \pm\hat{J}_\pm \\ [\hat{J}^2, \hat{J}_\pm] &= 0\end{aligned}$$

Chiamiamo $|j, m\rangle$ gli autovalori di \hat{J}^2 e \hat{J}_3 tali che:

$$\langle j, m | j', m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

Introduciamo le equazioni agli autovalori:

$$\begin{aligned}\hat{J}^2 |j, m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \\ \hat{J}_3 |j, m\rangle &= \hbar m |j, m\rangle\end{aligned}$$

Si vede subito la degenerazione di \hat{J}^2 , che per essere risolta necessita di \hat{J}_3 ; \hat{J}_3 rompe la degenerazione per j fissato.

$$\sigma(\hat{J}^2) = \{j = 0, 1, 2, \dots\}$$

Il fatto che $j > 0$ lo si evince proiettando $\hat{J}^2 |j, m\rangle$ su $\langle j, m|$ o tenendo presente che la lunghezza quadrata del vettore \hat{J}^2 deve essere > 0 .

Per capire la natura di m consideriamo le equazioni agli autovalori e investighiamo l'azione di \hat{J}_\pm sugli autovettori che diagonalizzano \hat{J}^2 e \hat{J}_3 :

$$\hat{J}_+ |j, m\rangle = N_{j,m}^+ |j, m+1\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \quad (3.1)$$

$$\hat{J}_- |j, m\rangle = N_{j,m}^- |j, m-1\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \quad (3.2)$$

Con:

$$\begin{aligned}\mathbf{1} &= m(m+1) \\ \mathbf{2} &= m(m-1) \\ \mathbf{3} &= j(j+1)\end{aligned}$$

$\hat{J}_+ |j, m\rangle$ appartiene all'autospazio di \hat{J}^2 con autovalore j , che è degenere, e all'autospazio di \hat{J}_3 con autovalore $m+1$, che rompe la degenerazione.

$\hat{J}_- |j, m\rangle$ appartiene all'autospazio di \hat{J}^2 con autovalore j (che è degenere) e all'autospazio di \hat{J}_3 con autovalore $m-1$, che rompe la degenerazione.

Notiamo che se in 3.1 ho $m = j$ allora $\mathbf{1} = \mathbf{3} \Rightarrow \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} = 0$ e se avessi $m > j \Rightarrow$ il numero sotto radice sarebbe < 0 , il che non è ammesso $\Rightarrow \hat{J}_+$ non può aumentare m del valore pari a j altrimenti $\mathbf{1}$ supera $\mathbf{3}$.

In 3.2 se $m = -j$ allora $\mathbf{2} = \mathbf{3} \Rightarrow \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} = 0$ e se avessi $m < -j$ il

numero sotto radice sarebbe sicuramente $< 0 \Rightarrow \hat{J}_-$ non può diminuire più del valore pari a $-j$ altrimenti **2** supera **3**. \hat{J}_+ e \hat{J}_- si devono bloccare a $m = j$ ed $m = -j$ e ho:

$$\sigma(\hat{J}_3) = \{-j \leq m \leq j\}$$

A j fissato la degenerazione è risolta da m .

Lo spettro di \hat{J}_3 è limitato da quello di \hat{J}^2 . questo comporta che applicando \hat{J}_+ e \hat{J}_- agli stati di un autospazio di fissato j si deve bloccare perché non posso procedere all'infinito ad alzare ed abbassare m :

$$\hat{J}_+ |j, m\rangle = 0 \Rightarrow m = j$$

$$\hat{J}_- |j, m\rangle = 0 \Rightarrow m = -j$$

Se applico p volte (con $p \in \mathbb{Z}^+$) \hat{J}_+ allo stato $|j, m_0\rangle$ mi interrompo quando:

$$\hat{J}_+^p |j, m_0\rangle = 0 \Rightarrow p = j - m_0 \Rightarrow j = m_0 + p$$

analogamente se applico q volte (con $q \in \mathbb{Z}^+$) \hat{J}_- a $|j, m_0\rangle$ mi interrompo quando:

$$\hat{J}_-^q |j, m_0\rangle = 0 \Rightarrow q = j + m_0 \Rightarrow j = q - m_0$$

Allora:

$$\begin{cases} j = m_0 + p \\ j = q - m_0 \end{cases}$$

Sommo membro a membro ed ho:

$$\begin{aligned} 2j &= p + q \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 2j = n \in \mathbb{Z}^+ \\ \Rightarrow j &= \frac{n}{2} \Rightarrow j \text{ può essere semintero} \\ j &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \end{aligned}$$

j intero ho moti orbitali

j semintero ho moti intrinseci della particella: spin.

A j fissato possiamo lavorare in uno spazio vettoriale generato da $2j+1$ autostati creati da $m = j, j-1, \dots, -j$ isomorfo a \mathbb{C}^{2j+1} (infatti \mathcal{H} ha dimensione finita).

$$V = \text{Span} \{|j, m\rangle; m = j, j-1, \dots, -j\} = \mathbb{C}^{2j+1}$$

In \mathbb{C}^{2j+1} possiamo determinare le matrici che rappresentano gli operatori. Faccio infine notare che non ho spazi più piccoli di quello con $j = 0$ e che quando j è intero gli autostati $|j, m\rangle$ saranno le armoniche sferiche $Y_j^m(\theta, \phi) = N_{j,m} P_j^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ dove P_j^m sono le funzioni di Legendre.

3.2 Spazio interno degli spin: $\mathbb{L}_{\hat{J}_{1/2}}^2$

Fisso $j = s = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ e $m = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{H} \equiv \text{Span} \left\{ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\} = \mathbb{C}^2$$

con $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi_+(m)$ spin su

$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \chi_-(m)$ spin giù

$$\hat{J}^2 = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \hat{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \hat{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \hat{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \hat{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_+ = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \hat{J}_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \hat{J}_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \hat{J}_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \hat{J}_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_- \hat{J}_+^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_1 = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_2 = \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i} = \frac{1}{2i} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{i} \\ -\frac{1}{i} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Chiamo matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e l'operatore spin è dato da

$$\hat{J}_i = \hat{s}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$$

dove in concomitanza con $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{i,j,k} \hat{J}_k$ ho

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\hbar \varepsilon_{i,j,k} \sigma_k$$

Quindi l'algebra astratta di \hat{J} ci ha introdotti a questo spazio di $\dim = 2$ che in natura è associato all'elettrone. Inoltre abbiamo concluso che \exists una proprietà tipica degli

elettroni che non ha un corrispettivo classico e che si manifesta come una specie di momento angolare, il quale può assumere 2 stati: spin su $|\uparrow\rangle$ e spin giù $|\downarrow\rangle$. La funzione d'onda dell'elettrone sarà fattorizzata in una $\psi(x, t)$ in $\mathbb{L}^2\hat{x}$ e in una funzione in $\mathbb{L}^2_{\hat{s}=1/2}$ (nello spazio interno degli spin) $\chi(m)$

$$\psi(x, t, m) = \chi(m)\psi(x, t) \quad \text{con } \chi(m) = \chi_+(m) + \chi_-(m)$$

con

$$\hat{J}^2\chi_{\pm} = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_{\pm} \quad \hat{J}_3\chi_{\pm} = \pm\frac{1}{2}\hbar\chi_{\pm}$$

ed ho

$$\psi(x, t, m) = \chi_+(m)\psi_+(x, t) + \chi_-(m)\psi_-(x, t) = \begin{pmatrix} \chi_+(x, t) \\ \chi_-(x, t) \end{pmatrix}$$

Quindi le funzioni d'onda di un elettrone sono rappresentabili come un vettore colonna di \mathbb{C}^2 chiamato spinore.

$\psi(x, t, m)$ deve soddisfare l'equazione di Schrödinger con $\hat{H} = \hat{H}(\hat{x}, \hat{p}, \sigma_i)$. $|\psi(t)\rangle$ è proiettato su una base completa (prodotto tensoriale tra $\mathbb{L}^2_{\hat{x}}$ e $\mathbb{L}^2_{\hat{j}=1/2}$):

$$|x\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle$$

$$\psi(x, t, m) = \left(|x\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle \right) |\psi(t)\rangle$$

Tutto ciò è stato mostrato da Stern e Gerlach inviando un fascio di elettroni in un $\vec{B} \perp$ alla direzione del fascio. Se gli elettroni hanno momento di dipolo magnetico vengono deviati. Classicamente si vedrebbero le particelle diffuse con continuità in una regione, invece vediamo metà degli elettroni deviare la loro traiettoria più in alto rispetto la direzione del campo e metà più in basso: il momento di dipolo magnetico \vec{m} ha interagito con \vec{B} secondo l'hamiltoniana:

$$H = -\gamma\vec{m} \cdot \vec{B} = \gamma m B \cos \theta$$

Classicamente mi aspetto una distribuzione continua in θ , ma \vec{m} è quantizzato e si osservano 2 direzioni precise. Siccome una carica elettrica crea un dipolo magnetico ruotando, si assume che tale dipolo sia proporzionale al momento intrinseco dell'elettrone ed una misura accurata permette di concludere che l'elettrone deve avere:

$$\hat{J}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \quad \hat{J}_3 = \frac{\hbar}{2}$$

che è compatibile con la rappresentazione vista ora

$$j = \frac{1}{2} \quad m = \pm\frac{1}{2}$$

3.3 Composizione dei momenti

Consideriamo un sistema nel quale sono definiti 2 momenti angolari indipendenti (ad esempio due particelle) $\hat{J}_{(1)}$ e $\hat{J}_{(2)}$ agenti su spazi interni diversi. Definita \hat{H} l'hamiltoniana del sistema si ha:

$$[\hat{H}, \hat{J}_{(1)}] = [\hat{H}, \hat{J}_{(2)}] = [\hat{J}_{(1)}, \hat{J}_{(2)}] = 0$$

allora $\hat{J}_{(1)}$ e $\hat{J}_{(2)}$ hanno base comune con \hat{H} e uno stato di fissato livello energetico è descritto sia dai numeri quantici di $\hat{J}_{(1)}$, sia da quelli di $\hat{J}_{(2)}$, cioè da j_1, m_1, j_2, m_2 . Definiamo \hat{J}_{tot} del sistema composto

$$\hat{J}_{tot} = \hat{J}_{(1)} + \hat{J}_{(2)}$$

si ha che $[\hat{H}, \hat{J}_{tot}] = 0$ allora posso descrivere lo stato anche con i numeri quantici j_{tot} ed m_{tot} .

$j_1, m_1, j_2, m_2, j_{tot}, m_{tot}$ non sono indipendenti e se parto da j_1 e j_2 fissati, per descrivere lo stato posso usare o m_1 ed m_2 oppure j_{tot}, m_{tot} . Con queste considerazioni si capisce che non è necessario lavorare sull'intero spazio di Hilbert, ma possiamo utilizzare il sottospazio ottenuto a fissati j_1 e j_2 di dimensione $= (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ e di cui i vettori $|m_1, m_2\rangle$ sono una base.

Affinché ciò che abbiamo detto sia consistente si deve anche avere che $|j_{tot}, m_{tot}\rangle$ sia una base per questo sottospazio. Per verificarlo determiniamo i valori di j_{tot} compatibili con quelli fissati di j_1 e j_2 ed il legame tra m_{tot} , m_1 ed m_2 .

Si ha:

$$\begin{cases} \hat{J}_{(1)}^2 |j_1, m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1 + 1) |j_1, m_1\rangle \\ \hat{J}_{3(1)} |j_1, m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1, m_1\rangle \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{J}_{(2)}^2 |j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2 + 1) |j_2, m_2\rangle \\ \hat{J}_{3(2)} |j_2, m_2\rangle = \hbar m_2 |j_2, m_2\rangle \end{cases}$$

Il sistema composto vive nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{tot}$ e la base che diagonalizza \hat{J}_{tot} sarà:

$$|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

Quello che voglio fare è diagonalizzare simultaneamente \hat{J}_{tot}^2 , \hat{J}_{3tot} , $\hat{J}_{(1)}^2$ e $\hat{J}_{(2)}^2$ (cioè al posto della diagonalizzazione simultanea $\hat{J}_{3(1)}$ e $\hat{J}_{3(2)}$ utilizzo \hat{J}_{tot}^2 e \hat{J}_{3tot}). Così facendo fisso i valori di j_{tot} ed m_{tot} compatibili con j_1 e j_2 . Operare una diagonalizzazione del genere significa cambiare base e passare da $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ a $|j_1, j_2, j_{tot}, m_{tot}\rangle$

Pongo $\hbar = 1$ ed ho:

$$\hat{J}_{tot}^2 |j_1, j_2, j_{tot}, m_{tot}\rangle = j_{tot}(j_{tot} + 1) |j_1, j_2, j_{tot}, m_{tot}\rangle$$

$$\widehat{J}_{3\text{tot}} |j_1, j_2, j_{\text{tot}}, m_{\text{tot}}\rangle = m_{\text{tot}} |j_1, j_2, j_{\text{tot}}, m_{\text{tot}}\rangle$$

Lo spettro di \widehat{J}_{tot} è limitato da quello di $(J_{(1)} + J_{(2)})^2$, infatti:

$$\widehat{J}_{\text{tot}}^2 = (\widehat{J}_{(1)}^2 + \widehat{J}_{(2)}^2) = J_{(1)}^2 + J_{(2)}^2 + 2\widehat{J}_{(1)} \cdot \widehat{J}_{(2)} \quad (3.3)$$

Si noti che $\widehat{J}_{(1)}$ e $\widehat{J}_{(2)}$ agiscono su spazi di Hilbert diversi e commutano. Chiamiamo:

$$\begin{cases} \widehat{J}_{(1)}^2 |j_1, m_1\rangle = \lambda_1 |j_1, m_1\rangle & \text{con } \lambda_1 = j_1(j_1 + 1) \\ \widehat{J}_{(2)}^2 |j_2, m_2\rangle = \lambda_2 |j_2, m_2\rangle & \text{con } \lambda_2 = j_2(j_2 + 1) \\ \widehat{J}_{\text{tot}}^2 |j_{\text{tot}}, m_{\text{tot}}\rangle = \lambda_{\text{tot}} |j_{\text{tot}}, m_{\text{tot}}\rangle & \text{con } \lambda_{\text{tot}} = j_{\text{tot}}(j_{\text{tot}} + 1) \end{cases} \quad (3.4)$$

Metto le 3.4 in 3.3 ed ho:

$$\lambda_{\text{tot}}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \cos \theta \quad \theta = \text{angolo tra } \widehat{J}_{(1)} \text{ e } \widehat{J}_{(2)}$$

Essendo $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ implica che:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 &\leq (\lambda_{\text{tot}})^2 \leq (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \\ \Rightarrow |\lambda_1 - \lambda_2| &\leq \lambda_{\text{tot}} \leq |\lambda_1 + \lambda_2| \end{aligned}$$

che vuol dire

$$|j_1 - j_2| \leq j_{\text{tot}} \leq j_1 + j_2$$

Lo stesso discorso può essere fatto per trovare m_{tot} solo che $\widehat{J}_{(1)3}$ e $\widehat{J}_{(2)3}$ essendo dirette lungo lo stesso asse, ho una somma algebrica

$$-j_{\text{tot}} \leq m_{\text{tot}} = m_1 + m_2 \leq +j_{\text{tot}}$$

Questi sono i valori ammessi per \widehat{J}_{tot} e \widehat{J}_3 operando il cambio di base da $|j_1 m_1, j_2, m_2\rangle$ a $|j_1, j_2, j_{\text{tot}}, m_{\text{tot}}\rangle$, naturalmente sono ammessi valori solo a salti di interi.

Non ci resta che verificare che il numero di vettori della base $|j_{\text{tot}}, m_{\text{tot}}\rangle$ sia proprio $(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)$. Per fissare le idee supponiamo $j_1 \geq j_2$

$$\sum_{j_{\text{tot}}=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j_{\text{tot}} + 1) = (2j_2 + 1) + 2 \sum_{j_{\text{tot}}=j_1-j_2}^{j_1+j_2} j_{\text{tot}} = (2j_2 + 1)(2j_1 + 1)$$

$|j_{\text{tot}}, m_{\text{tot}}\rangle$ costituisce una base per il sottospazio fissato j_1 e j_2 . La trasformazione della base $|m_1, m_2\rangle$ ($= j_1 \otimes j_2$) a $|j_{\text{tot}}, m_{\text{tot}}\rangle$ ($= \bigoplus_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (j_{\text{tot}})$) è data da:

$$|j_{\text{tot}}, m_{\text{tot}}\rangle = \sum_{m=-j_1}^{j_1} \sum_{m=-j_2}^{j_2} |m_1, m_2\rangle \langle m_1, m_2 | j_{\text{tot}}, m_{\text{tot}}\rangle$$

dove $\langle m_1, m_2 | j_{tot}, m_{tot} \rangle$ sono i coefficienti di Clebsch-Gordan, cioè i coefficienti di passaggio tra le basi.

Poiché $m_{tot} = m_1 + m_2$, tutti i coefficienti di Clebsch-Gordan con $m_{tot} \neq m_1 + m_2$ sono = 0. Sia:

(j_{tot}) l'autospazio di \hat{J}_{tot}^2 , (j_1) l'autospazio di $\hat{J}_{(1)}^2$ e j_2 l'autospazio di $\hat{J}_{(2)}^2$ si ha che la decomposizione dei momenti angolari come prodotti tensoriali e somme dirette sugli autospazi (come anticipato):

$$(j_1) \otimes (j_2) = \bigoplus_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (j_{tot}) \quad (3.5)$$

3.4 Sistemi composti con $j_1 = 1/2$ e $j_2 = 1/2$: rappresentazione spinoriale

Ho un sistema composto da due particelle che formano lo stesso stato legato (stesso E_n) con $j_1 = \frac{1}{2}$ e $j_2 = \frac{1}{2}$. Si ha:

$$(j_1) \otimes (j_2) = \bigoplus_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (j_{tot})$$

Calcolo $j_{tot \min} = |j_1 - j_2| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}| = 0$

e $j_{tot \max} = j_1 + j_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\exists!$ salto intero tra i due valori

ed ho da 3.5:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}\right) = (0) \oplus (1)$$

Dimensione $2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 = 4$

Trovo la base $|m_1, m_2\rangle$ che rappresenta $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$

$$\begin{aligned} \text{I particella in } \mathbb{L}_{j=1/2}^2, \text{ base } |j_1, m_1\rangle & \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |\uparrow_1\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |\downarrow_1\rangle \end{array} \right. \\ \text{II particella in } \mathbb{L}_{j=1/2}^2, \text{ base } |j_2, m_2\rangle & \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |\uparrow_2\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |\downarrow_2\rangle \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{base del set composto } \left(\frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}\right), |m_1, m_2\rangle \left\{ \begin{array}{l} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = |\uparrow_1 \uparrow_2\rangle \\ \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = |\uparrow_1 \downarrow_2\rangle \\ \left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = |\downarrow_1 \uparrow_2\rangle \\ \left|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = |\downarrow_1 \downarrow_2\rangle \end{array} \right.$$

Passo da $|m_1, m_2\rangle$ a $|j_{tot}, m_{tot}\rangle$:

$$j_{tot} = 0 \Rightarrow m_{tot} = 0 \Rightarrow |0, 0\rangle \text{ Singoletto}$$

$$j_{tot} = 1 \Rightarrow -1 \leq m_{tot} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} |1, -1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, 1\rangle \end{cases} \text{ Tripletto}$$

Determino i coefficienti di Clebsch-Gordan ovvero le combinazioni lineari di $|m_1, m_2\rangle$ che esprimono $|j_{tot}, m_{tot}\rangle$, che saranno della forma:

$$|j_{tot}, m_{tot}\rangle = ||j_1 - j_2| \leq j_{tot} \leq j_1 + j_2, m_{tot} = m_1 + m_2\rangle$$

Parto da quel $|j_{tot}, m_{tot}\rangle$ che ha m_{tot} più alto:

$$|1, 1\rangle \Rightarrow m_{tot} = m_1 + m_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow |m_1, m_2\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = |\uparrow_1, \uparrow_2\rangle = |1, 1\rangle$$

Stato separabile¹

$$|1, 0\rangle \Rightarrow \hat{J}_{-tot} |1, 1\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle = (\hat{J}_{(1)-} + \hat{J}_{(2)-}) |\uparrow, \uparrow\rangle$$

allora se applico \hat{J}_{-tot} a $|\uparrow_1, \uparrow_2\rangle$ devo tenere conto che $\hat{J}_{-tot} |m_1, m_2\rangle$ diventa:

$$\hat{J}_{-(1)} |m_1, m_2\rangle + \hat{J}_{-(2)} |m_1, m_2\rangle \quad \text{cioè:}$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{-tot} |1, 1\rangle &= \sqrt{2} |1, 0\rangle = \hat{J}_{(1)-} |\uparrow_1, \uparrow_2\rangle + \hat{J}_{(2)-} |\uparrow_1, \uparrow_2\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right)} \left|\frac{1}{2} - 1, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right)} \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 1\right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)} \left[\left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \right] = |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle + |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle \end{aligned}$$

¹Le distinzioni tra stato entangled e stato separabile saranno fornite nel prossimo capitolo

$$\Rightarrow |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow_1, \uparrow_2\rangle + |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle)$$

Stato entangled

$$|1, -1\rangle \Rightarrow \hat{J}_{-tot} |1, 0\rangle = \sqrt{2} |1, -1\rangle$$

$$\Rightarrow |1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_{-(1)} |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle + \hat{J}_{-(2)} |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle + \hat{J}_{-(1)} |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle + \hat{J}_{-(2)} |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle) = |\downarrow_1, \downarrow_2\rangle$$

Stato separabile

$|0, 0\rangle \Rightarrow m_{tot} = m_1 + m_2$ ci dice che deve necessariamente esserci una combinazione di $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ e $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ cioè $|\uparrow_1, \downarrow_2\rangle$ e $|\downarrow_1, \uparrow_2\rangle$

$$|0, 0\rangle = \alpha |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle + \beta |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle, \text{normalizzando:}$$

$$\begin{aligned} \langle 0, 0 | 0, 0 \rangle &= (\alpha^* \langle \uparrow_1, \downarrow_2 | + \beta^* \langle \downarrow_1, \uparrow_2 |)(\alpha |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle + \beta |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle) \\ &= |\alpha|^2 (\langle \uparrow_1, \downarrow_2 | \uparrow_1, \downarrow_2 \rangle) + |\beta|^2 (\langle \downarrow_1, \uparrow_2 | \downarrow_1, \uparrow_2 \rangle) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{aligned}$$

Inoltre $|0, 0\rangle$ deve essere \perp all'altro stato con $m = 0$ e si ha:

$$\langle 1, 0 | 0, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1, \downarrow_2\rangle - |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle)$$

Il singoletto è uno stato entangled.

”Quando gioco con la mia gatta, chi può sapere se lei non si stia divertendo con me più di quanto non faccia io con lei?”

MONTAIGNE

”La libertà è una sola: le catene imposte a uno di noi pesano sulle spalle di tutti”

N. MANDELA

Capitolo 4

Entanglement: la fisica dei sistemi ingarbugliati

4.1 Introduzione all'entanglement

Facciamo alcune considerazioni sulla base del set composto $|m_1, m_2\rangle$, del capitolo precedente, essa appartenendo allo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ha le seguente interpretazione estesa:

$|m_1, m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$ ovvero, ad esempio $|\uparrow_1, \downarrow_2\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle$. Ora se scelgo lo stato del tripletto, data dalla sovrapposizione non separabile di stato prodotto:

$$|j_{tot}, m_{tot}\rangle = |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1, \downarrow_2\rangle + |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle)$$

e facciamo una misura sul primo sistema (cioè proietto $|1, 0\rangle$ sulla base $|\downarrow_1\rangle, |\uparrow_2\rangle$) creo un collasso della funzione d'onda della I particella in $|\uparrow_1\rangle$ con probabilità $\frac{1}{2}$, cioè faccio emergere una proprietà sulla prima particella e istantaneamente deve emergere una proprietà sulla II seconda particella. Così avrò:

$$|j_{tot}, m_{tot}\rangle_{collassata} = |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle$$

stessa cosa se la prima particella collassa in $|\downarrow_1\rangle$, sempre con probabilità $\frac{1}{2}$, avrò:

$$|j_{tot}, m_{tot}\rangle_{collassata} = |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle$$

In entrambi i casi affinché valga la legge di conservazione $m_{tot} = m_1 + m_2$, effettuare una misura sul primo sistema, fa sì che venga selezionato lo stato del secondo sistema, in modo che rispetti la legge di conservazione a cui è sottoposto il sistema composto. Si noti che prima della misura non c'è alcun riscontro della correlazione, è la misura che "crea" la correlazione. Sottolineo che la correlazione non implica che le particelle siano

interagenti, inoltre le correlazioni sono indipendenti dalla distanza (non località): il collasso della funzione d'onda è un effetto non locale perché cambia istantaneamente la funzione d'onda del sistema nello spazio. Quando si ha riscontro dei fatti sopra esposti si dice che i sistemi 1 e 2 sono entangled.

Lo stato del tripletto $|1, 1\rangle = |\uparrow_1, \uparrow_2\rangle$ sarà, invece, detto stato separabile; infatti esistono gli stati $|\uparrow_1\rangle$ e $|\uparrow_2\rangle$ tali che il loro prodotto tensoriale tra stati, senza chiamare in causa una combinazione di prodotti tensoriali tra stati, dia direttamente lo stato del sistema composto. Su questo sistema ci sarà correlazione, ma non gli altri effetti sopra descritti.

4.2 Matrice di densità ridotta

Consideriamo il sistema composto $A \cup B$, formato dalle sottoparti A e B , esso vivrà in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, allora il sistema composto sarà descritto da uno stato puro, Infatti dette $\{|i\rangle_A\}$ e $\{|j\rangle_B\}$ basi ortonormali complete di \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B si ha:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |\phi_i\rangle_A \otimes |\varphi_j\rangle_B$$

Introduciamo l'operatore \hat{F} , che agisca solo sulla sottoparte A : $\hat{F} = \hat{F}_A \otimes \mathbb{1}_B$ e calcoliamone il valore di aspettazione su $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\hat{F}_A \otimes \mathbb{1}_B|\psi\rangle &= \left(\sum_{i,j} c_{i,j}^* \langle\phi_i|_A \otimes \langle\varphi_j|_B \right) \hat{F}_A \otimes \mathbb{1}_B \left(\sum_{k,n} c_{k,n} |\phi_k\rangle_A \otimes |\varphi_n\rangle_B \right) = \quad (4.1) \\ &= \sum_{i,j,k,n} c_{i,j}^* c_{k,n} \langle\phi_i|_A \hat{F}_A |\phi_k\rangle_A \langle\varphi_j|_B \mathbb{1}_B |\varphi_n\rangle_B = \\ &= \sum_{i,j,k,n} c_{i,j}^* c_{k,n} \langle\phi_i|_A \hat{F}_A |\phi_k\rangle_A \delta_{j,n} = \\ &= \sum_{i,k} \left(\sum_j c_{i,j}^* c_{k,j} \right) \langle\phi_i|_A \hat{F}_A |\phi_k\rangle_A \end{aligned}$$

Definiamo gli elementi della matrice densità ridotta ρ_A come:

$$[\hat{\rho}_A]_{i,k} = \langle\phi_i|_A \hat{\rho}_A |\phi_k\rangle_A = \sum_j c_{i,j}^* c_{k,j} \text{ ELEMENTI DELLA MATRICE DENSITÀ RIDOTTA}$$

e la 4.1 diventa:

$$\langle\psi|\hat{F}_A \otimes \mathbb{1}_B|\psi\rangle = \sum_i \langle\phi_i|\hat{\rho}_A \hat{F}_A |\phi_i\rangle = \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle \quad (4.2)$$

Si hanno le seguenti rappresentazioni:

$$\langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B} [\hat{\rho} \hat{F}] \quad (4.3)$$

4.3 è la traccia di $\hat{\rho} \hat{F}$, fatta rispetto tutti gli stati appartenenti $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Evidentemente la \sum su tutti gli stati è assente perché essendo il sistema composto descritto dal solo stato puro è l'unico stato appartenente a $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Inoltre preciso che $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$.

$$\sum_i \langle \phi_i | \hat{\rho}_A \hat{F}_A | \phi_i \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_A} [\hat{\rho}_A \hat{F}_A] \quad (4.4)$$

Allora da 4.2 e 4.3, tenuto conto della particolare forma di $\hat{F} = \hat{F}_A \otimes \mathbb{1}_B$ si ha:

$$\langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B} [\hat{\rho} \hat{F}] = \text{Tr}_{\mathcal{H}_A} [\hat{\rho}_A \hat{F}_A] \quad (4.5)$$

Infine, ricordando che gli stati di \mathcal{H}_B sono $\{|\varphi_j\rangle\}$ si ha:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{H}_B} \hat{\rho} &= \sum_j \langle \varphi_j | \hat{\rho} | \varphi_j \rangle = \\ &= \sum_j \langle \varphi_j | \left(\sum_{m,n} c_{m,n} |\phi_m\rangle_A \otimes |\varphi_n\rangle_A \right) \left(\sum_{i,k} c_{i,k}^* \langle \phi_i|_A \otimes \langle \varphi_k|_B \right) | \varphi_j \rangle = \\ &= \sum_{j,m,n,i,k} c_{m,n} c_{i,k}^* \langle \varphi_j | \varphi_n \rangle \langle \varphi_k | \varphi_j \rangle |\phi_m\rangle \langle \phi_i| = \\ &= \sum_{j,m,n,i,k} c_{m,n} c_{i,k}^* \delta_{j,n} \delta_{k,j} |\phi_m\rangle \langle \phi_i| = \\ &= \sum_{m,i} \left(\sum_j c_{m,j} c_{i,j}^* \right) |\phi_m\rangle \langle \phi_i| \quad \text{e si ha:} \\ \langle \phi_m | \text{Tr}_{\mathcal{H}_B} \hat{\rho} | \phi_i \rangle &= \sum_j c_{m,j} c_{i,j}^* = \langle \phi_m | \hat{\rho}_A | \phi_i \rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{Tr}_{\mathcal{H}_B} \hat{\rho} = \hat{\rho}_A = \text{Tr}_{\mathcal{H}_B} |\psi\rangle \langle \psi| \end{aligned} \quad (4.6)$$

Quindi $\hat{\rho}_A$ si concentra sul comportamento della sola sottoparte A e lo fa tracciando via il sistema B , ma non trascurando l'interazione che A ha con B . Se lo stato A è descrivibile da un raggio $|\phi_i\rangle_A$ diremo che il sistema si trova in uno stato puro e $\hat{\rho}_A = |\phi_i\rangle_A \langle \phi_i|_A$. Possiamo immaginare B come un fluido le cui proprietà inducono determinate condizioni su A , che è in esso immerso.

4.3 Decomposizione di Schmidt

Un vettore arbitrario di $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ (nel caso di stato puro) si può scrivere come:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j} c_{i,j} |\phi_i\rangle_A \otimes |\varphi_j\rangle_B = \sum_i |\phi_i\rangle_A \otimes |\tilde{\varphi}_i\rangle_B \quad \text{STATO BIPARTITO PURO} \quad (4.7)$$

con $|\tilde{\varphi}_i\rangle_B = \sum_j c_{i,j} |\varphi_j\rangle_B$ che non è normalizzato.

Se $\{|\phi_i\rangle_A\}$ sono una base per $\hat{\rho}_A$, il postulato 2 della meccanica quantistica ci dice che $\hat{\rho}_A$ ha la seguente rappresentazione:

$$\hat{\rho}_A = \sum_i p_i |\phi_i\rangle_A \langle \phi_i|_A \quad (4.8)$$

RAPPRESENTAZIONE DELLA MATRICE DENSITÀ RIDOTTA

dove p_i sono gli autovalori di $\hat{\rho}_A$.

Ricordiamo che da 4.6 si ha $\hat{\rho}_A = Tr_{\mathcal{H}_B} \hat{\rho}$; occupiamoci del II membro:

$$\begin{aligned} Tr_{\mathcal{H}_B} \hat{\rho} &= Tr_{\mathcal{H}_B} |\psi\rangle \langle \psi| = Tr_{\mathcal{H}_B} \left(\sum_i |\phi_i\rangle_A \otimes |\tilde{\varphi}_i\rangle_B \right) \left(\sum_j \langle \phi_j|_A \otimes \langle \tilde{\varphi}_j|_B \right) = \\ &= Tr_{\mathcal{H}_B} \sum_{i,j} |\phi_i\rangle_A \langle \phi_j|_A \otimes |\tilde{\varphi}_i\rangle_B \langle \tilde{\varphi}_j|_B \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ora detta $\{|k\rangle\}$ una base per \mathcal{H}_B si ha che:

$$Tr_{\mathcal{H}_B} (|\tilde{\varphi}_i\rangle_B \langle \tilde{\varphi}_i|_B) = \sum_k {}_B \langle k | \tilde{\varphi}_i \rangle_B {}_B \langle \tilde{\varphi}_j | k \rangle_B = \sum_k {}_B \langle \tilde{\varphi}_j | k \rangle_B {}_B \langle k | \tilde{\varphi}_i \rangle_B = {}_B \langle \tilde{\varphi}_j | \tilde{\varphi}_i \rangle_B$$

Da cui abbiamo che 4.9 diventa:

$$Tr_{\mathcal{H}_B} \hat{\rho} = \sum_{i,j} {}_A \langle \phi_j | \phi_i \rangle_A {}_B \langle \tilde{\varphi}_j | \tilde{\varphi}_i \rangle_B \quad (4.10)$$

Comparando la 4.8 con la 4.10 si ha:

$${}_B \langle \tilde{\varphi}_j | \tilde{\varphi}_i \rangle_B = p_i \delta_{i,j}$$

A questo punto è banale scrivere la normalizzazione di $|\tilde{\varphi}_i\rangle_B$ e si ha:

$$|\varphi'_i\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{p_i}} |\tilde{\varphi}_i\rangle_B$$

Lo stato 4.7 $|\psi\rangle_{AB}$ diventa:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |\phi_i\rangle_A \otimes |\varphi'_i\rangle_B \quad (4.11)$$

DECOMPOSIZIONE DI SCHMIDT PER UNO STATO BIPARTITO PURO

Qua i coefficienti dell'espansione sono legati agli autovalori di $\hat{\rho}_A$.

Possiamo espandere in questa forma gli stati bipartiti puri, ma tale decomposizione dipende dalla scelta delle basi $|\phi_i\rangle_A$ e $|\varphi'_i\rangle_B$. Questo significa che utilizzando la stessa base non è possibile espandere simultaneamente due stati puri, bipartiti e diversi $\in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Compariamo uno stato puro bipartito rappresentato dalla decomposizione di Schmidt con una semplice espansione dello stesso stato in una base ortonormale $|\alpha\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B$ di $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha, \beta} |\alpha\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B \quad (4.12)$$

Le basi $\{|\alpha\rangle_A\}$ di \mathcal{H}_A e $\{|\mu\rangle_B\}$ di \mathcal{H}_B sono legate alle basi usate nella decomposizione di Schmidt 4.11 dalle trasformazioni unitarie $\hat{U}_A \hat{U}_B$:

$$|\phi_i\rangle_A = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle_A (U_A)_{\alpha i} \quad |\phi'_i\rangle_B = \sum_{\mu} |\mu\rangle_B (U_B)_{\mu i} \quad (4.13)$$

$(U_A)_{\alpha i}, (U_B)_{\mu i}$ = elementi della matrice associata alla trasformazione.

Dal confronto della 4.11 con la 4.12, sostituendo le 4.13 in 4.11 si ha:

$$\psi_{\alpha \beta} = \sum_i (U_A)_{\alpha i} \sqrt{p_i} (U_B^T)_{i \mu} \quad (4.14)$$

DECOMPOSIZIONE A VALORI SINGOLARI CON I PESI $\{p_i\}$ CHIAMATI VALORI SINGOLARI DELLA MATRICE ψ

Quindi applicando trasformazioni unitarie (sia a destra che a sinistra) agli elementi matriciali $\psi_{\alpha \beta}$ ottengo una matrice non negativa e "diagonale" (dove una matrice diagonale è qui intesa tale che se $i \neq j$ si ha che ho l'elemento matriciale $ij = 0$, da notare che posso anche avere matrici rettangolari, allora quando $\dim \mathcal{H}_A \neq \dim \mathcal{H}_B$).

A questo punto dalla 4.11 si evince che i $|\varphi'_i\rangle$ sono una base per $\hat{\rho}_B$ e $\{p_i\}$ i suoi autovalori e la sua rappresentazione sarà:

$$\hat{\rho}_B = \text{Tr}_{\mathcal{H}_A} \hat{\rho} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_A} |\psi\rangle \langle \psi| = \sum_i p_i |\varphi'_i\rangle \langle \varphi'_i|$$

Quindi $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_B$ hanno stesso numero di autovalori non nulli se $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B$. Se $\dim \mathcal{H}_A \neq \dim \mathcal{H}_B$, $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_B$ avranno un numero diverso di autovalori nulli. Se $\hat{\rho}_A$ e

$\hat{\rho}_B$ non hanno autovalori degeneri oltre 0 allora la 4.11 è determinata univocamente da $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_B$, basta fare una loro diagonalizzazione per costruire la 4.11 con gli autovalori e gli autostati trovati, appunto, dalla diagonalizzazione. Se $\hat{\rho}_A$ (e quindi anche $\hat{\rho}_B$) ha autovalori non nulli degeneri, non basta la diagonalizzazione di $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_B$ per ottenere la 4.11, ma bisogna capire quali $|\phi_i\rangle_A$ devono essere accoppiati a quali $|\varphi'_i\rangle_B$. Per capirlo consideriamo \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B aventi $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = d$ e $U_{i,j}$ una matrice unitaria $d \times d$, in modo che:

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j=1}^d |\phi_i\rangle_A U_{i,j} \otimes |\varphi'_i\rangle_B \quad (4.15)$$

Quest'espansione di $|\psi\rangle_{AB}$ porta a concludere che:

$$\hat{\rho}_A = \hat{\rho}_B = \frac{1}{d} \mathbb{1}$$

e applicando le trasformazioni unitarie 4.13 si ha:

$$|\phi_i\rangle_A = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle_A U_{\alpha i} \quad |\varphi'_i\rangle_B = \sum_{\mu} |\mu'\rangle_B U_{\mu i}^*$$

e abbiamo:

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |\phi_i\rangle_A \otimes |\varphi'_i\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,\alpha,\mu} |\alpha\rangle_A U_{\alpha i} \otimes |\mu'\rangle_B U_{\mu i}^* = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\alpha} |\alpha\rangle_A \otimes |\alpha'\rangle_B$$

In poche parole una rotazione simultanea delle due basi preserva la norma dello stato $|\psi\rangle_{AB}$, pertanto crea ambiguità nella scelta delle basi per scrivere la decomposizione.

4.4 Sistemi bipartiti separabili ed entangled

La decomposizione di Schmidt permette di distinguere gli stati bipartiti separabili da quelli entangled.

Detto N = numero di Schmidt il numero di autovalori non nulli di $\hat{\rho}_A$ (e $\hat{\rho}_B$) (che sarà $\in \mathbb{Z}^+$) è possibile associare ad ogni $|\psi\rangle_{AB}$ tale numero.

Se il numero di Schmidt associato a $|\psi\rangle_{AB}$ è > 1 lo stato è entangled, altrimenti è separabile.

Quindi uno stato separabile può essere scritto come:

$$|\psi\rangle_{AB} = |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \quad (4.16)$$

e le matrici densità ridotta saranno $\rho_A = |i\rangle \langle i|$ e $\rho_B = |j\rangle \langle j|$ e saranno dette pure. Come detto ad inizio capitolo questo stato ha correlazione, ma non ha tutti gli altri

effetti tipici dell'entanglement.

Un esempio è lo stato del tripletto $|1, 1\rangle$:

$$|1, 1\rangle = |\uparrow_1, \uparrow_2\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\uparrow_2\rangle = |\psi\rangle_{1,2}$$

Questi due sistemi sono correlati negli spin, che sono diretti nella stessa direzione, ma non sono entangled.

Stati non rappresentati come il semplice prodotto tensoriale 4.16 sono detti entangled e vengono fuori quando applico il principio di sovrapposizione a più di un sistema, infatti per le considerazioni fatte sulla decomposizione di Schmidt e sul numero di Schmidt hanno la seguente rappresentazione:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$$

Preciso che in questo caso le matrici $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_B$ sono dette miste.

Esempio:

Riprendiamo i sistemi composti con $j_1 = \frac{1}{2}$ e $j_2 = \frac{1}{2}$ e troviamo le matrici densità ridotte nel caso dello stato separabile del tripletto $|1, 1\rangle$ e di quello entangled del singoletto $|0, 0\rangle$

Stato separabile:

$$\hat{\rho} = |\uparrow_1, \uparrow_2\rangle \langle \uparrow_1, \uparrow_2|$$

Quella ridotta riferita al sottosistema 1 sarà:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= Tr_{\mathcal{H}_2} \hat{\rho} = \sum_j \langle \varphi_j | \rho | \varphi_j \rangle = \langle \uparrow_2 | \hat{\rho} | \uparrow_2 \rangle + \langle \downarrow_2 | \hat{\rho} | \downarrow_2 \rangle = \\ &= \langle \uparrow_2 | (|\uparrow_1, \uparrow_2\rangle \langle \uparrow_1, \uparrow_2|) | \uparrow_2 \rangle + \langle \downarrow_2 | (|\uparrow_1, \uparrow_2\rangle \langle \uparrow_1, \uparrow_2|) | \downarrow_2 \rangle = \\ &= |\uparrow_1\rangle \langle \uparrow_1| \end{aligned}$$

che rappresenta, come anticipato sopra, uno stato puro.

Stato entangled:

Trovo ρ :

$$\rho = \frac{1}{2} \left[(|\uparrow_1, \downarrow_2\rangle - |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle) (\langle \uparrow_1, \downarrow_2| - \langle \downarrow_1, \uparrow_2|) \right]$$

e $\hat{\rho}_1$ associata al primo sottosistema sarà:

$$\hat{\rho}_1 = Tr_{\mathcal{H}_2} \hat{\rho} = \sum_i \langle \varphi_i | \hat{\rho} | \varphi_i \rangle = \langle \uparrow_2 | \hat{\rho} | \uparrow_2 \rangle + \langle \downarrow_2 | \hat{\rho} | \downarrow_2 \rangle = \frac{1}{2} (|\downarrow_1\rangle \langle \downarrow_1| + |\uparrow_1\rangle \langle \uparrow_1|)$$

che è uno stato misto, come previsto.

Come già anticipato all'inizio di questo capitolo ci sono delle differenze fondamentali tra uno stato entangled ed uno separabile. Una differenza sostanziale è che uno stato entangled non può essere creato localmente. L'unico modo di far diventare due sottosistemi A e B entangled è che interagiscano tra loro, questa condizione non è necessaria per preparare uno stato separabile. Allora se parto da uno stato separabile l'unico modo che ho di ottenere uno entangled è applicare una trasformazione unitaria collettiva allo stato separabile e per farlo la sola strada possibile è fra interagire in qualche modo i due sistemi, questa interazione intreccerà i due sistemi e la funzione d'onda che descrive la loro composizione diventerà un'entità ovunque presente nello spazio ricoperto dalle due particelle. Qualsiasi sia la loro distanza la funzione d'onda continuerà a rispondere come un corpo rigido e sarà, pertanto, spudoratamente non locale.¹ Rimetto in evidenza il fatto che l'entanglement mette in luce correlazioni tra due sistemi, ma non interazioni o forze di interazione tra le sottoparti. Le correlazioni, come abbiamo detto, sono indipendenti dalla distanza e creano le proprietà del sistema con l'atto di misura. Quindi abbiamo correlazioni non locali, causate dal collasso della funzione d'onda che è non locale.

Per capire meglio consideriamo due show con due personaggi Alice e Bob, isolati in due cabine arbitrariamente distanti e non comunicanti. Le due platee assistenti agli show danno ad entrambi un foglio di carta in cui c'è scritto un numero: 1, 2 o 3. Il pubblico sceglie il numero da dare a ciascuno dei due, che può essere lo stesso per entrambi o diverso. Alice e Bob devono solo scrivere sul biglietto ricevuto o sì o no, senza regola alcuna. Il procedimento viene ripetuto più volte: il pubblico dà i biglietti, Alice e Bob scrivono sì o no, si vede l'esito, il pubblico ridà altri due biglietti con altri due numeri e così via.

L'esito dell'esperimento è il seguente: la sequenza di sì e no è completamente casuale, in media c'è lo stesso numero di sì e no, ma quando Alice e Bob ricevono un biglietto con lo stesso numero danno sempre la stessa risposta: sì oppure no. Ecco la correlazione. In caso di un foglietto con lo stesso numero la risposta è perfettamente correlata! Due sistemi entangled si comportano come Alice e Bob, indipendentemente dalla loro distanza: c'è un effetto non locale. Ora si noti che le liste di sì e no, se prese singolarmente, sono del tutto casuali. In realtà io che rilevo i risultati di Alice, ad esempio, non so nemmeno se Bob dall'altra parte esiste, la correlazione è inaccessibile a livello locale ed emerge solo quando confronto entrambe le liste (questo è uno dei punti cruciali dell'entanglement che ha sbrigliato gli scienziati dalle perplessità che erano state imposte dal paradosso EPR, di cui discuteremo nel prossimo capitolo).

¹Un altro modo di pensare la funzione d'onda del sistema entangled è ritenerla come un ente elastico presente tra i due sottosistemi, con coefficiente di elasticità arbitrariamente grande, in modo che anche l'elongazione della funzione d'onda possa essere arbitrariamente grande per ricoprire la distanza tra le parti

Voglio concludere il paragrafo con una celebre frase dello stesso Schrödinger:
«Io considero l'entanglement non uno, ma il tratto più caratteristico della meccanica quantistica, quello che implica il suo completo distacco da qualsiasi concezione classica».

4.5 Stima dell'entanglement: le entropie

Essendo l'entanglement una proprietà dei sistemi composti non può essere associata ad una misura, possiamo, però, parlare di una sua stima. Uno stato entangled è praticamente collegato a sottosistemi misti. Per un sistema bipartito ho $\hat{\rho}_A = \sum_i p_i |\phi_i\rangle_A \langle\phi_i|$ e lo stato del sistema sarà tanto più entangled quanto più sparpagliata è la distribuzione delle probabilità classiche p_i all'interno della stessa matrice. Si ricorda che si deve avere $\sum_i p_i = 1$ e $0 \leq p_i \leq 1$

4.5.1 Entropia di Shannon

Vogliamo ora saper quantificare il grado di disordine di una variabile aleatoria Y che può dare M esiti diversi con probabilità p_k . Consideriamo un sistema fisico ed una sua osservabile Y che possa assumere M valori y_k (con $k = 1, \dots, M$) con probabilità p_k , si ha:

$$S(Y) = S(p_1, \dots, p_k, \dots, p_M) = - \sum_{k=1}^L p_k \ln p_k \quad \text{ENTROPIA DI SHANNON}$$

Quest'entropia è associata ad ogni distribuzione classica (infatti è funzione della sola distribuzione p_k) ed è una proprietà del sistema in sé che misura quanto la distribuzione sia non deterministica. Si capisce come una distribuzione costante (con $p_k = 1/L$ e $L = \text{cost} \forall k$) massimizza questo tipo di entropia ($S(Y) = \ln L$) in quanto ogni risultato sarà equiprobabile.

la distribuzione Delta di Dirac ($p_k = \delta(k - k_0)$) renderà minima l'entropia di Shannon $S(Y) = 0$, infatti avrò un solo esito certo per la misurazione e la distribuzione sarà totalmente deterministica. La $S(Y)$ fornisce una misurazione della mancanza di informazione di una distribuzione probabilistica. Se una distribuzione ha $S(Y)$ maggiore di quella associata ad una seconda distribuzione, allora è meno deterministica della seconda.

4.5.2 Entropia di Von Neumann

Consideriamo un sistema quantistico, il cui stato è descrivibile dalla matrice densità:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$$

In analogia all'entropia classica di Shannon possiamo definire l'entropia di Von Neumann associata alla distribuzione di probabilità p_k , con la quale abbiamo rappresentato $\hat{\rho}$.

$$S(\rho) = -Tr[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}] \quad \text{ENTROPIA DI VON NEUMANN}$$

Quando $\hat{\rho}$ è diagonale ci rimbattiamo nella versione classica di Shannon. Questo tipo di entropia ci aiuta a stimare quanto entangled è un sistema. Consideriamo un sistema entangled, esso si trova in uno stato puro (allora $\hat{\rho} = |\psi\rangle_{AB} \langle \psi|$), avrò $S(\rho) = 0$ (perché ho un solo $p = 1$, che coincide con la certezza di avere il sistema in $|\psi\rangle_{AB}$); quindi, diciamo, non è interessante l'entropia del sistema totale (che sarà sempre 0, dato che abbiamo a che fare con stati puri), piuttosto lo è quella legata ai sottosistemi entangled. Infatti un sistema puro entangled può essere visto come composto da sottosistemi miscelati, dove l'entropia di ognuno dei sottosistemi è $\neq 0$ e può essere utilizzata per misurare il loro grado di correlazione. Questa entropia è l'analogo quantistico dell'entropia termodinamica.

4.5.3 Entropia di un sistema bipartito

Consideriamo lo stato bipartito $|\psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e sia $|\psi\rangle_{AB}$ uno stato puro. Lo stato del sottosistema A sarà descritto da:

$$\hat{\rho}_A = Tr_{\mathcal{H}_B} |\psi\rangle_{AB} \langle \psi|$$

Vediamo quanto è entangled il sistema A :

$$S(\hat{\rho}_A) = -Tr(\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A) \quad (4.17)$$

Se $\hat{\rho}_A$ ha rappresentazione spettrale $\hat{\rho}_A = \sum_i p_i |\phi_i\rangle_A \langle \phi_i|$ riscriviamo l'entropia come:

$$S(\hat{\rho}_A) = - \sum_i p_i \ln p_i$$

Se lo stato fosse separabile avrei $N = 1$ (numero di Schmidt) ed un solo autovalore per $\hat{\rho}_A$ che chiamo p_1 e con $p_1 = 1$ e quindi $S(\hat{\rho}_A) = p_1 \ln p_1 = 0$.

Se A è entangled con B la sommatoria avrà più di un addendo $\neq 0$ (infatti $N > 1$)

e $S(\hat{\rho}_A) \neq 0$. Ora essendo che $|\psi\rangle_{AB}$ è uno stato puro gli autovalori non nulli di $\hat{\rho}_A$ coincidono con quelli di $\hat{\rho}_B$ ed ho

$$S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B)$$

Ora siccome l'entropia di Von Neumann è definita per mezzo di una traccia, questo comporta che la stima di entanglement non cambi se effettuo operazioni locali (quindi intervenendo solo su uno di essi) e per comunicazioni classiche.

Esempio:

Riprendiamo i sistemi composti con $j_1 = \frac{1}{2}$ e $j_2 = \frac{1}{2}$

Singoletto entangled, avevamo $\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2}(|\downarrow_1\rangle\langle\downarrow_1| + |\uparrow_1\rangle\langle\uparrow_1|)$

Tripletto separabile, avevamo $\hat{\rho}_1 = |\uparrow_1\rangle\langle\uparrow_1|$

e utilizziamole per calcolare:

S tripletto = 0

S singoletto = $-\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln 2$

Vediamo che lo stato entangled ha entropia maggiore di quello separabile.

4.5.4 Entropia di Renyi

A causa del logaritmo che compare nell'entropia di Von Neumann non è sempre facile valutare tale grandezza, in questi casi si usa la tecnica di Renyi, che generalizza l'entropia di Shannon:

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_k p_k^\alpha \quad \text{ENTROPIA DI ORDINE } \alpha \text{ O DI RENYI (con } \alpha \in \mathbb{R}^+) \text{)}$$

Quando $\alpha \rightarrow 1$, $S_\alpha \rightarrow S(Y)$

In fisica quantistica l'entropia di ordine α diventa:

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \text{Tr} \hat{\rho}^\alpha$$

e quando $\alpha \rightarrow 1$, $S_\alpha \rightarrow S(\hat{\rho})$

4.5.5 Entanglement di formazione

Rappresenta l'estensione dell'entropia di Von Neumann a stati misti.

Supponiamo di avere a che fare con un sistema bipartito e sia $\hat{\rho}$ la matrice densità che lo descrive. Decomponiamo il sistema in stati puri, cioè consideriamo gli insiemi $\{|\varphi_k\rangle, p_k\}$ tali che:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| \quad \text{con } p_k \geq 0 \text{ e } \sum_k p_k = 1$$

Per ogni $|\varphi_k\rangle$ costruiamo la sua matrice densità ridotta:

$$\rho_A^{(k)} = Tr |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$$

dall'entropia del sistema bipartito è $S(\rho_A) = -Tr(\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A)$ avrò che l'entropia di entanglement sarà:

$$E(\varphi_k) = S(\rho_A^{(k)}) = -Tr(\rho_A^{(k)} \ln \rho_A^{(k)})$$

così potrò definire:

$$E(\hat{\rho}) := \min \left\{ \sum_k p_k E(|\varphi_k\rangle) \right\}$$

Trovare questo minimo non è un'operazione banale, tuttavia nel caso di sottosistemi di $dim = 2$ si riesce a trovare la soluzione tramite l'introduzione di una nuova grandezza chiamata *concurrence* C , dove C è definita come

$$C = \max \{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}$$

con λ_i ($i = 1, \dots, 4$) autovalori di $\tilde{\rho}$, matrice 4×4 , dove $\tilde{\rho} = (\sigma_2 \otimes \sigma_2) \rho^* (\sigma_2 \otimes \sigma_2)$. Esiste una corrispondenza 1 a 1 tra la concurrence e l'entanglement di formazione. Possiamo utilizzare la concurrence come misura dell'entanglement.

”Bohr intuiva che la posizione di Einstein, se fosse stata presa sul serio, sarebbe risultata in aperto contrasto con la meccanica quantistica. Ma fu il teorema di Bell a materializzare questa contraddizione”

A. ASPECT

Capitolo 5

EPR vs Bell

5.1 Le tre condizioni di Einstein

Agli albori del XX secolo i fisici avevano sottomano tutte le conoscenze introdotte dalla teoria quantistica, finora discusse. Il problema era che la teoria quantistica, essendo per sua natura una teoria probabilistica, metteva in discussione i 3 perni introdotti da Einstein che sentenziavano le caratteristiche di una buona teoria fisica. Si creò una frattura nel mondo della fisica, che durerà circa 30 anni (dal 1935 al 1964), nel corso dei quali i fisici si schierarono in due classi di pensiero:

- I realisti, disturbati dall'indeterminazione quantistica
- La scuola di Copenhagen, baluardo della nuova teoria dei quanti.

Le condizioni imposte alle teorie dai realisti affinché fossero una buona descrizione della natura erano:

Completezza: tutti gli elementi della realtà devono avere una controparte nella teoria

Realismo: la misura di una grandezza fisica deve essere determinata con certezza, deve essere preesistente alla misura e quindi la misura non deve perturbare il sistema

Località: oggetti distanti non possono influenzarsi istantaneamente perché nessuna informazione può viaggiare velocità maggiori di c .

La teoria quantistica smantella queste 3 condizioni: l'introduzione di osservabili associate ai soli operatori autoaggiunti, il principio di sovrapposizione, il principio di indeterminazione, il collasso non locale della funzione e il collasso della funzione d'onda per sistemi entangled sgretolano le idee di Einstein per descrizione dell'universo.

5.2 Paradosso EPR

Nel 1935 Einstein, Podolski e Rosen pubblicano un articolo nel volume 47 del Physical Review intitolato "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?"

Questo articolo contesta i principi della scuola di Copenhagen tramite una formulazione oggi conosciuta come paradosso EPR.

Tramite un esperimento mentale si prova come la meccanica quantistica viola la condizione di realtà di una grandezza fisica, infatti facendo leva sui principi di indeterminazione legati di due osservabili che non commutano e sul fatto che non si può avere una misura simultanea dei due, senza alterare lo stato del sistema, si deve concludere che le due grandezze non avranno la stessa realtà simultanea.

Per provare la loro asserzione considerano due sistemi interagenti per un periodo limitato di tempo, così da poter misurare la posizione su uno di essi, senza perturbare il secondo, e simultaneamente misurare l'impulso (non commutante con la posizione) sul secondo sistema. Credono così di violare il principio di indeterminazione di Heisenberg e siccome per loro \hat{x} e \hat{p} possono essere simultaneamente reali, concludono che la meccanica quantistica è una teoria incompleta: la funzione d'onda non ci racconta tutta la storia e devono esistere delle variabili nascoste che completano la teoria.

Si analizzano le grandezze fisiche \hat{p} e \hat{x} . Consideriamo una particella a 1 grado di libertà e completamente caratterizzata da $|\psi\rangle$, funzione delle variabili scelte per esprimere il comportamento della particella. In generale $|\psi\rangle$ è un'autofunzione di A se ha

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$$

\Rightarrow quando misuro \hat{A} su $|\psi\rangle$ ottengo $a \in \mathbb{R}$ e la grandezza \hat{A} ha realtà fisica. Consideriamo $|\psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}Bx} \equiv$ onda piana, che è autostato di \hat{p} ma non di \hat{x}

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = p_0 |\psi\rangle$$

$\Rightarrow |\psi\rangle$ ha certamente momento p_0 . Se, invece, considero

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \neq a|\psi\rangle$$

Infatti $|\psi\rangle$ non è un autostato di $\hat{x} \Rightarrow \hat{x}$ non ha valore certo e si può considerare solo al \mathcal{P} che la posizione assuma valore tra a e b :

$$\mathcal{P}(a, b) = \int_a^b \underbrace{\check{\psi}^* \check{\psi}}_{=1} dx = \int_a^b dx = b - a$$

La \mathcal{P} è uniforme su tutto lo spazio considerato (tutti i punti hanno stesso \mathcal{P}).

Allora per sapere la posizione dobbiamo fare una misura con \hat{x} , che farà collassare la particella in un autostato della posizione, causando indeterminazione sul momento. \Rightarrow o \hat{p} o \hat{x} hanno realtà fisica per la meccanica quantistica.

Consideriamo, ora, i sistemi I e II di cui conosciamo gli stati a $t < 0$, I e II interagiscono in Δt , dopo il quale cessa l'interazione. Il sistema composto I+II è ora entangled definito da Ψ calcolabile da Schrödinger in ogni istante successivo. A questo punto non è più possibile ricavare lo stato di I e II separatamente. Da \hat{A} che si riferisce ad I con autovalori a_1, a_2, \dots e autofunzioni $w_1(x_1), w_2(x_1), \dots$

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x_2) w_n(x_1)$$

Se misuriamo \hat{A} e assume valore a_k il sistema viene proiettato sull'autospazio relativo all'autovalore a_k , cioè I proiettato in $w_k(x_1)$ e II sarà proiettato in $\psi_k(x_2)$ \Rightarrow $\Psi(x_1, x_2) = \psi_k(x_2) w_k(x_1)$

Sia \hat{B} un'altra grandezza riferita a I, con autovalori b_1, b_2, \dots e autofunzioni $v_1(x_1), v_2(x_1), \dots \Rightarrow$

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x_2) v_m(x_1)$$

Se misuro \hat{B} su I ed ottengo b_j avrò

$$\Psi(x_1, x_2) = \underbrace{\varphi_j(x_2) v_j(x_1)}_{\downarrow}$$

Tramite misurazioni su I posso lasciare II in due stati con $\varphi_j \neq \psi_k \in$ stessa realtà. Ma poiché i due sistemi non sono più interagenti al momento della misura II non può subire modifiche reali dalle operazioni fatte su I.

Se ψ_k e φ_j due autofunzioni di operatori non commutanti, ad esempio di \hat{x} e di \hat{p} .

Consideriamo due particelle il cui sistema composto ha:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp \quad \text{con } x_0 = \text{cost}$$

\hat{p}_1 riferito a I con autofunzione $w_p(x_1) = e^{\frac{i}{\hbar} p x_1}$ e autovalore p . Per la particella libera¹ $\sigma(\hat{p}_1)$ è continuo. Allora si ha:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x_2) w_n(x_1) dp = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) w_p(x_1) dp = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp$$

¹particella libera $\Rightarrow p = \hbar \vec{k}, \vec{k} \in \mathbb{R}^3$

infatti poiché $w_p(x_1) = e^{\frac{i}{\hbar} p x_1}$ si ha che $\psi_p(x_2) = e^{\frac{i}{\hbar} (x_0 - x_2) p}$ ed è autofunzione di \hat{p}_2 associato a II con autovalore $-p$.

Considero \hat{x}_1 su I \Rightarrow autofunzione $w_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$ con autovalore x

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x_2) v_m(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) w_x(x_1) dx \\ \Rightarrow \varphi_x(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} (x - x_2 + x_0) p} dp = 2\pi\hbar \delta(x - x_2 + x_0)\end{aligned}$$

autofunzioni di \hat{x}_2 associato a II con autovalore $x + x_0$. Se $[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0$ (e qua sorge il paradosso). Se misuro \hat{p}_1 o \hat{x}_1 si è in grado di prevedere con certezza (e senza perturbare il II sistema) \hat{p}_2 o \hat{x}_2 ?

Per il principio di realtà \hat{p} e \hat{x} appartengono alla stessa realtà, anche se non commutano, e se due grandezze che non commutano sono entrambi reali è la meccanica quantistica ad essere incompleta.

5.3 Teorema di Bell

Per 30 anni ci furono numerosi tentativi di riconciliare la meccanica quantistica con la fisica. Nel 1964 uscì un articolo scritto dallo stesso Bell intitolato "Sul paradosso EPR", in cui fornisce un metodo sperimentale per assodare la natura più o meno corretta del paradosso EPR.

Teorema di Bell: nessuna teoria fisica a variabili nascoste locali può riprodurre le predizioni della meccanica quantistica.

EPR presume il realismo locale, cioè: le proprietà delle particelle sono preesistenti alla misura e che gli effetti fisici si propagano a velocità finita. Bell dimostrò che il realismo induce a restrizioni (disuguaglianze di Bell) non richieste e violate dalla meccanica quantistica. Gli esperimenti condotti fino ad oggi mostrano la violazione delle disuguaglianze di Bell che diventano prova empirica contro il realismo locale senza violare la relatività, infatti per il teorema di non comunicazione non possiamo inviare informazioni a velocità superluminali.

Abbiamo una coppia di particelle di spin $\frac{1}{2}$ in un singoletto ed in moto 1D in direzioni opposte, generate dal decadimento Dalitz, rilevate da due rilevatori:

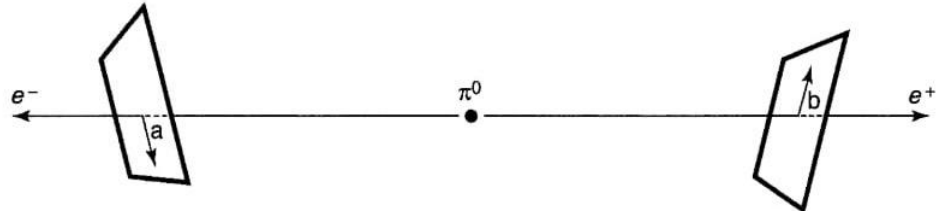


Figura 5.1: Versione di Bell per l'apparato dell'esperimento EPR in versione Bohm-Aharonov

Ricordo che siamo in $j_1 \otimes j_2 = (\frac{1}{2}) \otimes (\frac{1}{2}) = (0) + (1)$

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |j_1, m_1\rangle \\ |\downarrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |j_1, m_1\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |j_2, m_2\rangle \\ |\downarrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |j_2, m_2\rangle \end{cases}$$

Bell permise ai rilevatori di ruotare arbitrariamente ed in modo indipendente e misurò le grandezze $j_{1\ tot}$ e $j_{2\ tot}$. Il primo rilevatore misura la componente dello spin di e^- lungo la direzione data da un vettore \hat{a} , il secondo misura la componente dello spin di e^+ lungo la direzione \hat{b} . Misuriamo per semplicità la componente degli spin in unità di $\frac{\hbar}{2} \Rightarrow$ ogni rilevatore registra o +1 (spin su) o -1 (spin giù).

Una tabella dei risultati di molti decadimenti di π^0 potrebbe essere:

electron	positron	product
+1	-1	-1
+1	+1	+1
-1	+1	-1
+1	-1	-1
-1	-1	+1
\vdots	\vdots	\vdots

La sequenza di 1 e -1 è completamente casuale. In media ci sarà lo stesso numero di +1 e -1 e quando e^- ed e^+ sono misurati lungo la stessa direzione si registra sempre

+1 (e^-) e -1 (e^+) o viceversa. Prima di proseguire preciso che la trattazione non mira a decidere sul fatto che e^- ed e^+ abbiano spin definito fin dall'inizio, ma solo che c'è una correlazione non locale.

Bell propose di calcolare il valore di aspettazione del prodotto degli spin ($j_1\hat{a} \cdot j_2\hat{b}$) che chiamiamo $P(\hat{a}, \hat{b})$.

Se i rilevatori sono paralleli ($\hat{a} = \hat{b}$) $\Rightarrow P(\hat{a}, \hat{b}) = -1$

Se i rilevatori sono antiparalleli ($\hat{a} = -\hat{b}$) $\Rightarrow P(\hat{a}, \hat{b}) = +1$

Per orientazioni arbitrarie la meccanica quantistica predice

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = \hat{a} \cdot \hat{b} = -ab \cos \theta = \langle j_1\hat{a} | j_2\hat{a} \rangle \quad (5.1)$$

Bell propose che quest'ultimo risultato fosse impossibile per una teoria con variabili nascoste λ . Supponiamo che lo stato di π^0 sia caratterizzato da λ (in cui λ varia tra i decadimenti), che il risultato di una misura su e^- sia indipendente da \hat{b} (località) e che λ non siano contemplate in ψ

$\Rightarrow \exists A(\hat{a}, \lambda)$ e $B(\hat{b}, \lambda)$ funzioni tali la prima definisce il risultato di una misura su e^- e la seconda su e^+ .

$A(\hat{a}, \lambda) = \pm 1$ Risultato della misura $j_1\hat{a}$

$B(\hat{b}, \lambda) = \pm 1$ Risultato della misura $j_2\hat{b}$

Il fatto che A non dipenda da B e viceversa come detto è l'ipotesi di località

$\rho(\lambda)$ = distribuzione di \mathcal{P} di λ .

Ho già detto, ma sottolineo, che quando i rilevatori sono paralleli ($\hat{a} = \hat{b}$) ho $A(\hat{a}, \lambda) = -B(\hat{a}, \lambda) \forall \lambda$ e $\forall \hat{n}$

$$A(\hat{n}, \lambda) = -B(\hat{n}, \lambda) \quad (5.2)$$

Il valore di aspettazione del prodotto $j_1\hat{a} \cdot j_2\hat{b}$ è:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) d\lambda \quad (5.3)$$

e deve essere uguale a quello predetto dalla meccanica quantistica 5.1 affinché la teoria in λ sia giusta. Nel procedere Bell scoprirà che le due espressioni non si equivalgono.

In base a 5.2 si ha che 5.3 diventa

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) d\lambda$$

Sia \hat{c} un altro versore qualunque. Se $\hat{a} = \hat{c} \Rightarrow A(\hat{a}, \lambda) = -C(\hat{c}, \lambda)$ ed ho \forall combinazione di $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ che il valor medio del prodotto è:

$$\begin{cases} P(\hat{a}, \hat{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) d\lambda \\ P(\hat{a}, \hat{c}) = - \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) d\lambda \\ P(\hat{b}, \hat{c}) = - \int \rho(\lambda) \underbrace{B(\hat{b}, \lambda)}_{-A(\hat{b}, \lambda)} A(\hat{c}, \lambda) d\lambda \end{cases}$$

Correlazioni di misura della particella I (e^-) tra due assi differenti, con $\hat{a} \parallel \hat{b} \parallel \hat{c}$. Il risultato per j_2 può essere ricavato di conseguenza poiché uguale e opposto a j_1 . Consideriamo

$$\begin{aligned} P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c}) &= - \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) d\lambda + \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) d\lambda = \\ &= - \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) [1 - A(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda)] d\lambda \end{aligned}$$

Ma siccome $-1 \leq A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) \leq 1$ e $\rho(\lambda) [1 - A(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda)] \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} |P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c})| &\leq \int \rho(\lambda) [1 - A(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda)] d\lambda \\ &= \int \rho(\lambda) \underbrace{A(\hat{b}, \lambda)}_{-B(\hat{b}, \lambda)} A(\hat{c}, \lambda) d\lambda = \int \rho(\lambda) B(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) d\lambda = P(\hat{b}, \hat{c}) \end{aligned}$$

Allora:

$$|P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c})| \leq 1 + P(\hat{b}, \hat{c}) \quad (5.5)$$

Disuguaglianza di Bell: pone una condizione sui valori di aspettazione in λ lungo \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} . È un limite superiore su quanto le misure sulle particelle entangled possono essere correlate.

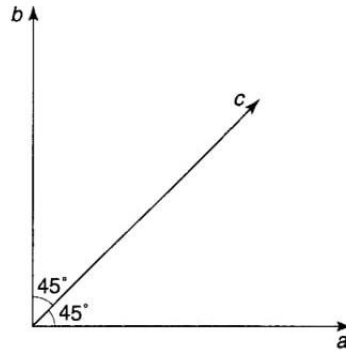
$|P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c})| = \Delta$ valore di aspettazione di una misura su e^- lungo i 3 assi

$P(\hat{b}, \hat{c})$ valore di aspettazione per una misura su e^+ ed e^- lungo assi diversi

È facile dimostrare che la predizione della meccanica quantistica data da 5.1 è incompatibile con 5.5

$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ complanari \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} P(\hat{a}, \hat{b}) = -\hat{a} \cdot \hat{b} = ab \cos 90 = 0 \\ P(\hat{a}, \hat{c}) = -\hat{a} \cdot \hat{c} = -ac \cos 45 = -0.7 \\ P(\hat{b}, \hat{c}) = -\hat{b} \cdot \hat{c} = -bc \cos 45 = -0.7 \end{cases}$$



$$\Rightarrow |0 + 0.7| \leq 1 + (-0.7)$$

In meccanica quantistica si ha una correlazione statistica maggiore rispetto le disuguaglianze di Bell.

Quindi il valor medio quantistico 5.1 non può essere ricondotto a 5.3 \Rightarrow le due teorie sono incompatibili \Rightarrow le λ possono esserci ma non locali!

Sarà, poi, Aspect a dimostrare con i suoi esperimenti, il collasso non locale della funzione d'onda.

5.4 Gli esperimenti: dal 1964 al 2019

La violazione della disuguaglianza di Bell attesta la natura quantistica di un sistema e fornisce un indice di come funziona il sistema stesso.

5.4.1 Disuguaglianze BCHSH: adattamento di Bell al caso empirico

I primi a dare verifica empirica della disuguaglianza furono Clauser e Freedman, il loro metodo era basato sull'eccitazione di atomi di calcio, che venivano portati ad un alto livello energetico così gli elettroni cadendo a livelli energetici via via più bassi rilasciavano un fotone ad ogni transizione. Occasionalmente, però, i fotoni emessi erano due, uno viola e uno verde (quindi nel visibile per essere rilevato) e risultavano essere entangled: infatti lo stato iniziale del sistema e quello finale era a $J_{tot} = 0$ ed il sistema composto dai due fotoni doveva sottostare alla conservazione del momento angolare. Nonostante i due riuscirono a registrare solo una coppia di fotoni entangled su un milione, ciò fu sufficiente per la verifica della violazione della disuguaglianza di Bell. Il loro esperimento si basava su quello mentale di EPR secondo la variante di Bohm: le coppie di fotoni emessi sono descritti da uno stato simile al singoletto, e dette: ν_1 e ν_2 = frequenza del fotone 1 e 2 che si propagano in direzioni opposte

$|x\rangle, |y\rangle$ = stati di polarizzazione lineare
 \hat{a}, \hat{b} = direzione dell'asse dei polarizzatori 1 e 2

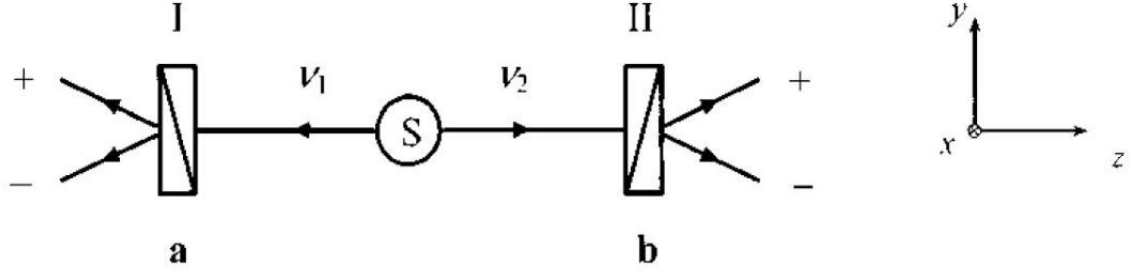


Figura 5.2: Variante ottica dell'esperimento EPR

Lo stato dei fotoni è

$$|\psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1, x_2\rangle + |y_1, y_2\rangle)$$

Si effettua una misura sul primo fotone tramite il I polarizzatore che darà $+1$ o -1 a seconda che la polarizzazione sia \parallel o \perp ad \hat{a} , la cosa stessa cosa avviene per il secondo fotone. Allora si ha 50% di probabilità di ottenere $+1$ o -1 sulle singole misure

$$\mathcal{P}_{\nu_1}(+\hat{a}) = \mathcal{P}_{\nu_1}(-\hat{a}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{P}_{\nu_2}(+\hat{b}) = \mathcal{P}_{\nu_2}(-\hat{b}) = \frac{1}{2}$$

Per misure in coincidenza la meccanica quantistica prevede:

$$\mathcal{P}_{\nu_1, \nu_2}(+\hat{a}, +\hat{b}) = \mathcal{P}_{\nu_1, \nu_2}(-\hat{a}, -\hat{b}) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta_{a,b}$$

$$\mathcal{P}_{\nu_1, \nu_2}(+\hat{a}, -\hat{b}) = \mathcal{P}_{\nu_1, \nu_2}(-\hat{a}, +\hat{b}) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta_{a,b}$$

Definiamo la funzione di correlazione:

$$E(\hat{a}, \hat{b}) := \mathcal{P}(+\hat{a}, +\hat{b}) + \mathcal{P}(-\hat{a}, -\hat{b}) - \mathcal{P}(+\hat{a}, -\hat{b}) - \mathcal{P}(-\hat{a}, +\hat{b})$$

Secondo le previsioni della meccanica quantistica si ha:

$$E_{MQ}(\hat{a}, \hat{b}) = \cos^2 \theta_{a,b}$$

Quindi si ha piena correlazione: una misura sul primo fotone mi darà +1, quindi anche sul secondo la misura sarà +1. Per Einstein questo implica l'esistenza delle variabili nascoste λ . Bell suppone l'esistenza di queste variabili e del principio di località e ricava la sua coppia di disuguaglianze: ridefinisce la funzione di correlazione

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda)$$

con:

$\rho(\lambda)$ = distribuzione di probabilità delle variabili nascoste

$A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda)$ = risultati delle misure della polarizzazione

Definiamo un'altra quantità atta a riscrivere le disuguaglianze di Bell, in modo da poter essere sfruttate negli esperimenti:

$$\begin{aligned} s(\hat{a}, \hat{a}', \hat{b}, \hat{b}', \lambda) &:= A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) + A(\hat{a}', \lambda) B(\hat{b}, \lambda) + A(\hat{a}', \lambda) B(\hat{b}', \lambda) - A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}', \lambda) = \\ &= A(\hat{a}', \lambda) [B(\hat{b}, \lambda) + B(\hat{b}', \lambda)] + A(\hat{a}, \lambda) [B(\hat{b}, \lambda) - B(\hat{b}', \lambda)] \end{aligned}$$

Con a' e b' nuove orientazioni della direzione dell'asse dei polarizzatori.

Siccome A e B possono essere solo ± 1 allora $s(\hat{a}, \hat{a}', \hat{b}, \hat{b}', \lambda)$ può essere solo ± 2 e integrando su tutto lo spazio delle λ si ottengono le disuguaglianze di Bell-Clauser-Horne-Shimony-Holt (BCHSH)

$$-2 \leq \int \rho(\lambda) s(\hat{a}, \hat{a}', \hat{b}, \hat{b}', \lambda) d\lambda \leq 2 \quad (5.7)$$

Dove poniamo

$$S(\hat{a}, \hat{a}', \hat{b}, \hat{b}', \lambda) = \int \rho(\lambda) s(\hat{a}, \hat{a}', \hat{b}, \hat{b}', \lambda) d\lambda = \theta(\hat{a}, \hat{b}) + \theta(\hat{a}', \hat{b}) + \theta(\hat{a}', \hat{b}') - \theta(\hat{a}, \hat{b}')$$

Quindi abbiamo ottenuto le disuguaglianze di Bell per quattro coefficienti di correlazione tra le misure di polarizzazione in quattro diverse orientazioni.

Si verifica facilmente che imponendo

$$\theta_{a,b} = \theta_{b,a'} = \theta_{a',b'} = II \text{ e } \theta_{a,b'} = \theta_{a,b} + \theta_{b,a'} + \theta_{a',b'}$$

e assegnando a $E(\hat{a}, \hat{b})$, $E(\hat{a}, \hat{b}')$, $E(\hat{a}', \hat{b})$, $E(\hat{a}', \hat{b}')$ i valori previsti dalla meccanica quantistica si ottiene

$$S_{QM} = 2\sqrt{2}$$

che viola il limite previsto da 5.7. Si ha un chiaro conflitto tra una teoria a variabili nascoste locali e la meccanica quantistica.

5.4.2 Aspect

Nel 1982 Aspect ottimizzò la produzione fotonica (di Clauser e Freedman) e l'efficienza dell'apparato rilevatore. Utilizzò sempre polarizzatori variabili nel tempo (per evitare il problema di una presunta comunicazione fotone-fotone, fotone-polarizzatore, polarizzatore-polarizzatore) e a due canali. Aspect sfruttò il famoso fascio atomico del calcio eccitato da due laser con polarizzazioni parallele e dirette perpendicolarmente alla direzione del fascio del calcio. Il laser imponeva agli elettroni un salto di due livelli sopra quello fondamentale e con il ritorno al livello energetico più basso si sarebbe evitata l'emissione di due fotoni entangled. La cascata a cui si fa riferimento è quella nella pagina seguente.

Bisogna precisare che un polarizzatore a una canale è costituito da due polarizzatori,

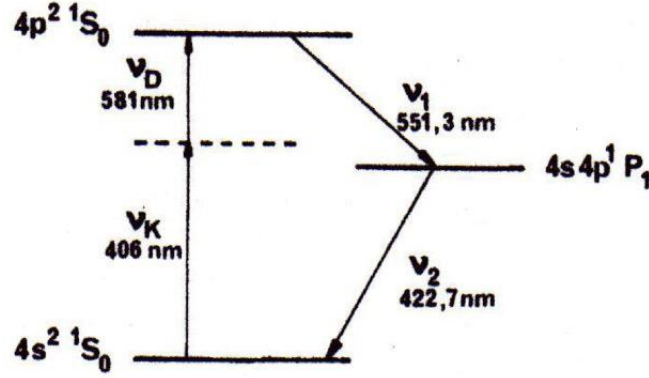


Figura 5.3: Transizioni dell'atomo di Calcio negli esperimenti di Aspect

uno dei quali è un polarizzatore lineare che trasmette i fotoni polarizzati parallelamente agli assi del polarizzatore stesso, bloccando quelli polarizzati perpendicolarmente, in questo modo si può misurare solo il risultato $R(+\hat{a}, +\hat{b})$, infatti il risultato -1 non si sa se è dovuto al fatto che la sua polarizzazione sia realmente perpendicolare agli assi di polarizzazione o se si ha per la scarsa efficienza del rilevatore. I risultati delle misure sono ottenuti con uno o entrambi i polarizzatori rimossi e, quindi, sono:

$$R(\infty, \infty) = R_0 \quad R(+\hat{a}, \infty) = R_1(\hat{a}) \quad R(\infty, +\hat{b}) = R_2(\hat{b})$$

e la disuguaglianza di Bell diventa:

$$-1 \leq s = \frac{1}{R_0} [R(\hat{a}, \hat{b}) + R(\hat{a}', \hat{b}) + R(\hat{a}', \hat{b}') - R(\hat{a}, \hat{b}') - R_1(\hat{a}) - R_2(\hat{b})] \leq 0$$

che è atta al caso dei polarizzatori variabili nel tempo.

Con l'apparato a due canali, invece, se un fotone è bloccato dall'apparato polarizzatore viene riflesso così non va perso e può essere ancora buono per essere misurato.

Veniamo all'esperimento vero e proprio: Aspect aveva progettato i polarizzatori in modo che le loro orientazioni potessero essere modificate durante il "volo" dei fotoni. Su ogni lato erano disposti due polarizzatori, posizionati in due diverse posizioni \hat{a} e \hat{a}' dal lato I e \hat{b} e \hat{b}' dal lato II, connessi ad un interruttore (c_1, c_2) che poteva determinare rapidamente a qual dei due polarizzatori (\hat{a} e \hat{a}' o \hat{b} e \hat{b}') i fotoni venivano inviati. I polarizzatori I e i polarizzatori II avevano una distanza di 13 metri ed Aspect aveva ideato un dispositivo in grado di scambiare le orientazioni \hat{a} e \hat{a}' del I polarizzatore e \hat{b} e \hat{b}' in $43 \text{ ns} = \frac{13 \text{ m}}{c}$. Questo era un dispositivo ottico-acustico, dove la luce interagiva con un'onda stazionaria ultrasonica nell'acqua. Quando l'onda cambiava nel contenitore trasparente dell'acqua, la luce veniva deflessa modificando l'orientazione dei polarizzatori in un intervallo di tempo minore di 43 ns .

Per misurazioni con $\theta_{a,b} = \theta_{b,a'} = \theta_{a',b'} = 22.5^\circ$ il risultato era:

$$s_{exp} = 0.101 \pm 0.020$$

in accordo con la previsione quantistica

$$s_{MQ} = 0.112$$

che viola la disuguaglianza di Bell.

Non c'è dubbio: una teoria a variabili nascoste locali non è prevista dalla natura, il carattere non locale della funzione d'onda è un dato di fatto.

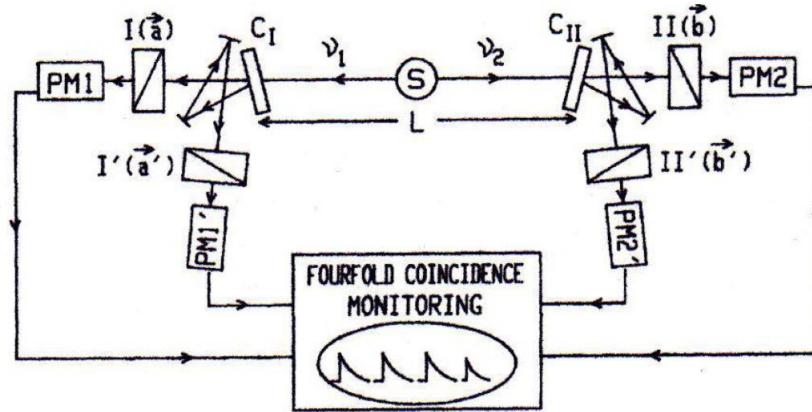


Figura 5.4: Schema dell'esperimento a 2 canali di Aspect (immagine esistente nella sua stessa tesi di dottorato)

5.4.3 La prima immagine dell'entanglement

Il 12 luglio del 2019 un team di fisici dell'università di Glasgow realizza per la prima volta l'immagine che mostra l'entanglement quantistico, pubblicando i risultati su Science Advances. Dimostrano che dall'immagine si può calcolare direttamente la violazione delle disuguaglianze di Bell (BCHSH), ottenendo una violazione con

$$s = 2.44 \pm 0.04$$

Finora abbiamo verificato la violazione delle disuguaglianze di Bell tramite misurazioni sequenziali dei tassi di correlazione di due fotoni separati nello spettro, in funzione degli angoli tra i polarizzatori. Abbiamo visto come la disuguaglianza di Bell è stata applicata a sistemi in uno spazio di Hilbert bidimensionale caratterizzato dalla polarizzazione dei fotoni, in realtà essa è applicabile anche a spazi di Hilbert di dimensione superiore. Infatti un'alternativa alla correlazione in polarizzazione è la correlazione nel momento angolare orbitale dei fotoni. I fotoni avanzano con un fronte d'onda che si avvolge a spirale intorno alla direzione di propagazione dell'onda in uno spazio quantistico multidimensionale. Per un fotone $E = pc = nh\nu = nh\frac{c}{\lambda} \Rightarrow p = \frac{nh}{\lambda}$ e l'elica ha equazione $e^{il\phi}$

Si indica con $J_z = l\hbar$ (con $l = -j, \dots, j$ e $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$) l'avvitamento del fotone su sé stesso (ovvero il momento angolare nella sua direzione, o momento angolare OAM). Come si vede J_z può assumere anche valori semi-interi. Si sono verificate correlazioni sulla OAM di fotoni prodotti dalla down-conversion parametrica (un cristallo non lineare² che separa spazialmente i fotoni incidenti conservando l'energia e, come si può dedurre da ciò che è scritto sopra, il momento) che hanno violato le disuguaglianze di Bell. La "quantum ghost imaging" sfrutta correlazione nella posizione e anticorrelazioni nel momento. Con questo metodo uno dei due raggi è diretto verso un oggetto con un rivelatore a singolo pixel, non spazialmente risolvete, che raccoglie la luce, il secondo raggio è diretto ad un rivelatore di immagine, spazialmente risolvete. L'immagine viene fornita dalla somma delle correlazioni "non imaging-imaging" registrate dai due rivelatori. Se il rivelatore "non imaging" e quello "imaging" si trovano nel piano dell'immagine della sorgente allora l'immagine è verticale rispetto il "rivelatore non imaging"; se si trovano nel campo lontano della sorgente l'immagine è invertita rispetto il "rivelatore non imaging". La natura verticale o invertita dell'immagine deriva dalla correlazione della posizione e dall'anticorrelazione del momento.

Nella fattispecie l'apparato per l'esperimento è costituito da un cristallo β -Bario Borato (BBO) bombardato da un laser a 335 nm (UV) creando così fotoni entangled (basso a sinistra). I fotoni poi sono separati da uno splitter che li invia a due sistemi ottici differenti e non direttamente influenzabili. Il primo fotone prosegue dritto e

²Quei cristalli il cui vettore di polarizzazione, dovuto dovuto al passaggio della luce è legato al campo \vec{E} da una relazione non lineare. In genere si ha quindi un materiale soggetto ad \vec{E} intensi (tipo laser)

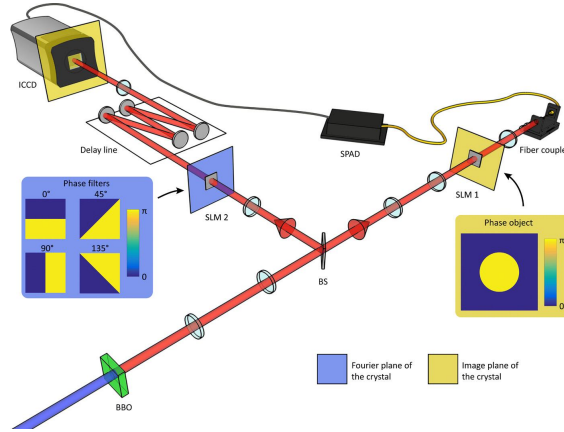


Figura 5.5: Immagine dell'apparato utilizzato per l'esperimento

viene riflesso da un modulatore di luce spaziale (SMF) viene poi raccolto da una fibra monomodale (SMF) per poi essere rivelato da un diodo (SPAD). Il secondo fotone va a sinistra e passa attraverso filtri a quattro fasi (un cristallo liquido), ovvero viene ruotato di quattro angoli diversi, per poi essere rivelato a valle. Quello che si evince è che i fotoni che non passano per il filtro di fase vengono comunque ruotati a causa dell'entanglement con il primo fotone. A livello di imaging il fenomeno si traduce in due profili speculari.

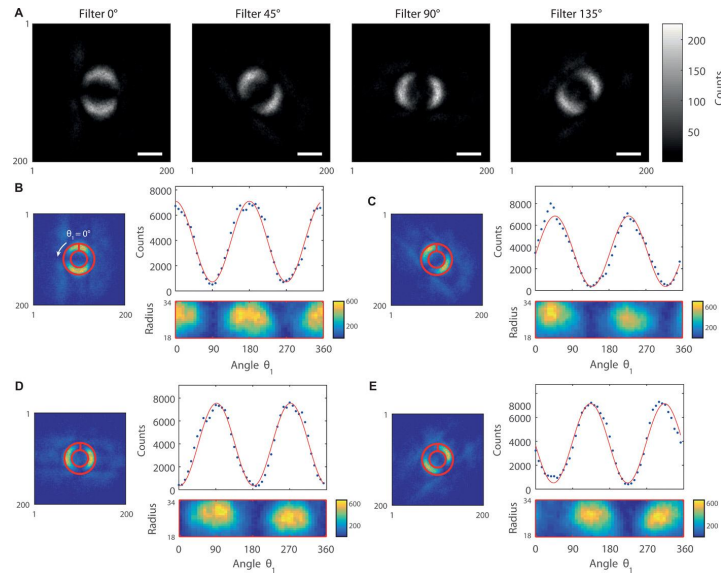


Figura 5.6: Immagine risultato dell'esperimento che dimostra la violazione della disuguaglianza di Bell

” Ho la sensazione che l’universo non sia soltanto più strano di quanto pensiamo, ma più strano di quanto potremmo mai pensare”
J.B.S. HALDANE

Capitolo 6

L'universo ingarbugliato

6.1 L'atomo di Idrogeno

L'atomo di idrogeno è l'elemento più semplice della tavola periodica degli elementi strutturato con $Z = 1$ e A variabile a seconda dell'isotopo considerato. La meccanica quantistica prevede, per la sua trattazione, un modello a soluzioni esatte (che vale anche per gli atomi idrogenoidi). Viene trattato come un problema a due corpi per m_e ed m_p , ridotto a due problemi agli autovalori che esprimono il moto libero del baricentro ed il moto relativo sottoposto ad un potenziale di tipo centrale

$$V(r) = \frac{-Ze^2}{r} \quad \text{con } e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Dando per scontata la soluzione al moto per la particella libera e portando il problema del moto relativo in un sistema di riferimento (SR) sferico posso separare l'equazione di Schrödinger stazionaria nella sua parte radiale e nella sua parte angolare e procedere con una diagonalizzazione simultanea di \hat{H} , \hat{L}^2 ed \hat{L}_3 . Le soluzioni sono della forma:

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (6.1)$$

Dove L_{n-l-1}^{2l+1} sono i polinomi di Laguerre, $a = 0.549 \text{ m}$ è il raggio dell'atomo di Bohr, n è il numero quantico relativo alla quantizzazione delle energie degli orbitali atomici ($n = 1, 2, 1 \dots$), l è il numero quantico relativo alla quantizzazione del momento angolare \hat{L}^2 ($l = 0, \dots, n-1$) dell' e^- ed m è relativo alla quantizzazione della sua terza componente \hat{L}_3 ($m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$). Le energie risultanti per i livelli orbitali sono

$$E_n = -\frac{1}{2} m_e \frac{Z^2 e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad \text{Formula di Bohr}$$

La quantizzazione presentata nel modello spiega le frequenze osservate nello spettro di emissione dell'atomo di idrogeno che sono quelle corrispondenti al salto tra l'orbita n -esima e quella k -esima:

$$\nu_{k,n} = \frac{E_n - E_k}{\hbar} = \frac{\pi m_e e^4}{\hbar^3} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (6.2)$$

Dove R è la costante di Rydberg, $R = 109677.576 \text{ cm}^{-1}$

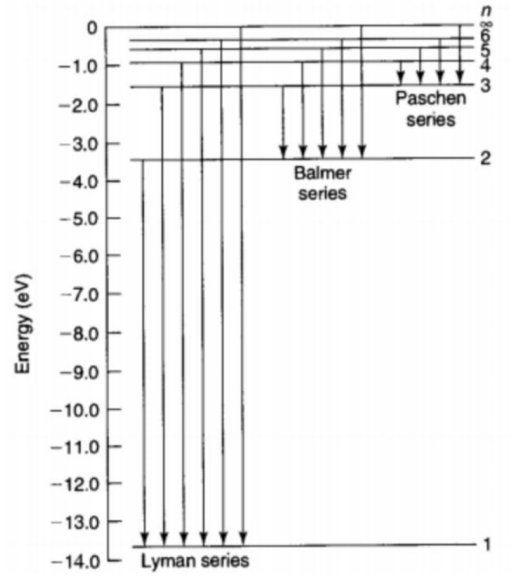


Figura 6.1: Principali transizioni dell'atomo di idrogeno

Quando un fotone con $E = h\nu_{k,n}$ interagisce con un e^- atomico si ha il salto del fotone dall'orbita stazionaria n a quella k . Se k aumenta la frequenza tende al valore limite $\nu = \frac{cR}{n^2}$ e se n è molto grande le righe iniziali di serie si dispongono molto vicine in frequenza e producono un'emissione simile ad uno spettro continuo, se ho ionizzazione ($n = 1$ e $k = \infty$) ho $h\nu = E_\infty - E_1 = 13.6 \text{ eV}$. Quindi si possono emettere o assorbire fotoni di frequenza opportuna.

Per ogni livello energetico n ho n^2 stati degeneri distinti dai valori di l ed m . Le transizioni atomiche non possono avvenire liberamente e in approssimazione di dipolo (considerando l'interazione nucleo e^-) l'emissione di radiazione elettromagnetica avviene con $\lambda \sim 10^{-5} \text{ cm}$ (visibile e primo UV). Si giunge così alle regole di selezione che indicano le transizioni permesse e quelle proibite (ovvero quelle con un'intensità un milione di volte più piccola di quelle permesse). I salti permessi sono tali che

$|\langle n, l, m | \hat{x} | n', l', m' \rangle|^2 \neq 0$ e danno

$$\Delta n = \text{qualunque} \quad \Delta l = \pm 1 \quad \Delta m = 0, \pm 1$$

Accendendo un campo magnetico esterno l' e^- viene visto come una carica in moto circolare e crea un momento magnetico orbitale che accoppiandosi al campo magnetico esterno perturba i livelli energetici. Inoltre essendo dotato di spin, l' e^- presenta anche un momento magnetico di spin

$$\vec{\mu}_{orb} = -g_{orb} \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \quad \vec{\mu}_e = -2 \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S} = -\mu_B \vec{\sigma}$$

Tramite l'interazione con il campo viene rimossa la degenerazione in m , ma non quella in l .

$E_n \rightarrow E_{n,m,m_s} = E_{int} \mu_B B (m + 2m_s)$. A causa dell'introduzione dello spin devo tenere conto del numero $m_s = \pm \frac{1}{2}$ che causa lo split del livello fondamentale che si divide in due stati non degeneri. Tenendo conto di m_s la degenerazione di ogni livello n diventa $2n^2$, ma siccome \hat{x} non agisce sullo spin ho $\Delta m = 0$.

Siccome $\Delta m = 0, \pm 1$, in approssimazione di dipolo, dove prima avevo una singola linea spettrale ora ho tripletti transitivi, quella per $\Delta m = 0$ rimane imperturbata e le altre due si pongono ai lati di questa (effetto Zeeman normale). Se valutiamo la struttura fine dell'atomo di idrogeno, possiamo eliminare il campo magnetico esterno ai fini degli split dei livelli energetici: infatti un campo magnetico è sempre presente a causa del moto dal punto di vista dell' e^- , che vede il protone ruotargli intorno, e questo campo interagisce col momento magnetico dell' e^- (interazione spin-orbita). Inoltre tenendo conto degli effetti relativistici dovuti al moto dell' e^- intorno al nucleo, del Lamb Shift (quantizzazione del campo elettromagnetico) e della struttura iperfine (dovuta alle diverse orientazioni dello spin relativo tra p ed e^- : lo stato $|\downarrow, \uparrow\rangle$ risulta con energia minore dello stato $|\uparrow, \uparrow\rangle$) si ha la rottura della degenerazione in l e lo sdoppiamento del livello fondamentale. Dalle correzioni relativistiche ho la risoluzione della degenerazione in l e dalle interazioni spin-orbita ho:

$$E_{n,j} = -\frac{13.59 \text{ eV}}{n^2} \left[1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

α = coefficiente di struttura fine $= 7.3 \cdot 10^{-3}$ e j , in questo caso, rappresenta una modifica di l , è infatti il momento angolare totale spin-orbita. Così gli stati atomici si caratterizzano con la notazione di Hund

$$^{2s+1}L_j$$

Con L che corrisponde al valore di $l = 0(S), 1(P), 2(D), \dots$

Per l'atomo di idrogeno in cui $s = \frac{1}{2}$ si ha $j = l + \frac{1}{2}$ o $j = |l - \frac{1}{2}|$ e avremo

$$n = 1 \rightarrow {}^2S_{\frac{1}{2}}$$

$$n = 2 \rightarrow {}^2S_{\frac{1}{2}}, {}^2P_{\frac{1}{2}}, {}^2P_{\frac{3}{2}}$$

6.2 Struttura iperfine e regioni HI

Gli effetti di struttura iperfine determinano un $\mu_B(p) \leq \mu_B(e^-)$ perché $m_p \geq m_e$ e nello stato del livello fondamentale $^2S_{\frac{1}{2}}$ rimuove la degenerazione grazie ai 2 stati ottenuti dagli spin del sistema nel tripletto (con spin paralleli) o nel singoletto (con spin antiparalleli). Il fatto che il singoletto risulta essere ad energia minore significa che è quello più favorito e la differenza tra i due stati, ottenuto da quello fondamentale, è:

$$\Delta E = \frac{4g_p\hbar^2}{3\pi m_e m_p a^4} = 5.88 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \quad g_p = \text{rapporto giromagnetico del protone}$$

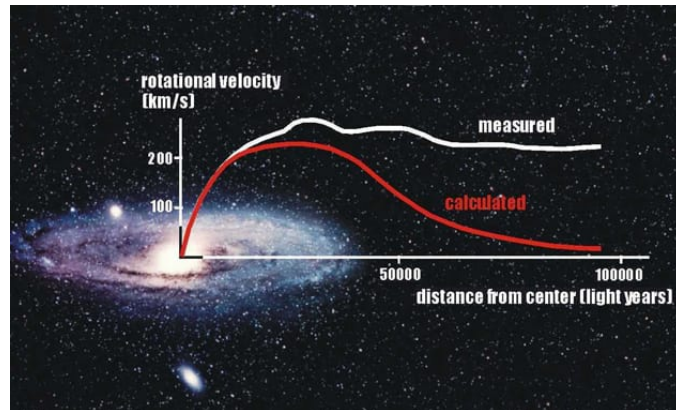
che corrisponde all'emissione di un fotone con $\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1.4 \text{ GHz}$ ($\lambda = 21 \text{ cm}$). La riga a 21 cm dell'HI (idrogeno neutro) è importante per la rilevazione di idrogeno in astrofisica. Anche se la probabilità di transizione è molto bassa ($A_{21} = \text{coefficiente di Einstein di emissione spontanea} = 2.87 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1} = \text{probabilità di transito di } e^- \text{ dal tripletto al singoletto per l'emissione del fotone a } \lambda = 21 \text{ cm}$), gli ambienti freddi ($T \sim 10 - 100 \text{ K}$) e poco densi ($n \sim 1 - 10 \text{ atomi/cm}^3$) la transizione diviene importante grazie agli enormi volumi coinvolti. Le osservazioni avvengono nella banda radio e sono accessibili perché l'ISM è trasparente a questa radiazione, come anche la nostra atmosfera. Le regioni HI sono assenti nelle galassie ellittiche, ma presenti nelle galassie a spirale ed irregolari. Per queste galassie le regioni HI si allargano oltre il disco galattico della componente stellare. Tramite la riga a 21 cm possiamo studiare l'ISM neutral medium ($T \sim 10^3 - 10^4 \text{ K}$) e l'ISM cold neutral medium ($T \sim 10 - 100 \text{ K}$) presenti nei bracci delle spirali. L'idrogeno che ruota nei bracci periferici delle galassie a spirale (soggetto ad effetto Doppler) ci permette di costruire le curve di rotazione delle galassie a spirale

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}$$

Questa curva dovrebbe avere un andamento kepleriano, ma $M(R)$ potrebbe modificare l'andamento. Si identificano 3 zone dove la $v(R)$ ha 3 diversi andamenti:

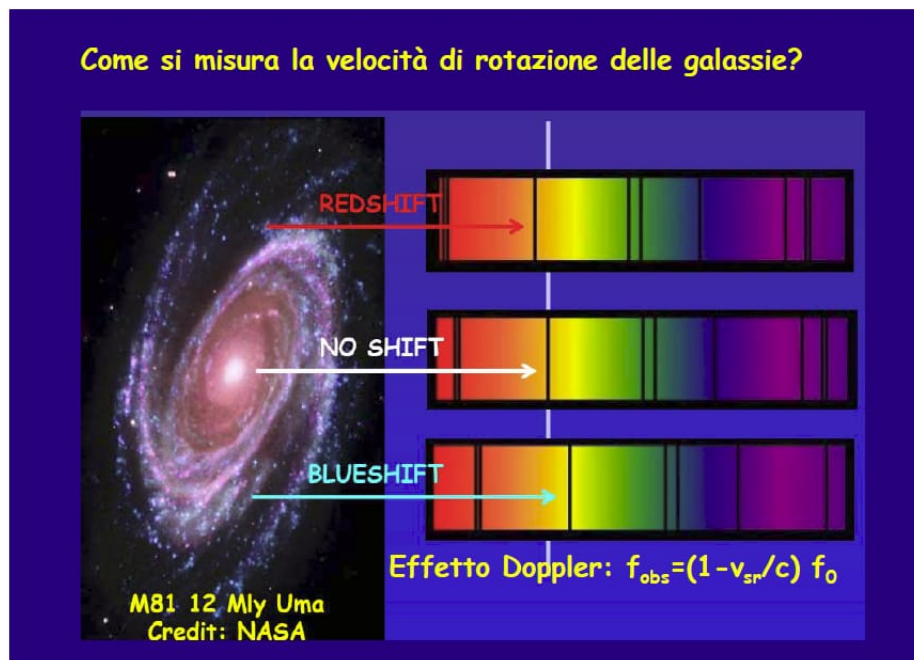
- bulge: si assume una rotazione di corpo rigido con $v(R) \sim R\sqrt{\rho(R)}$
- disco: dove $v(R) \propto R^0 = 1 = \text{cost}$
- parte esterna del disco dove ci si aspetterebbe un abbassamento del braccio delle kepleriana come $v(R) \propto R^{-1/2}$, in realtà il braccio resta piatto $v(R) \sim \text{cost}$ (\Rightarrow dark matter).

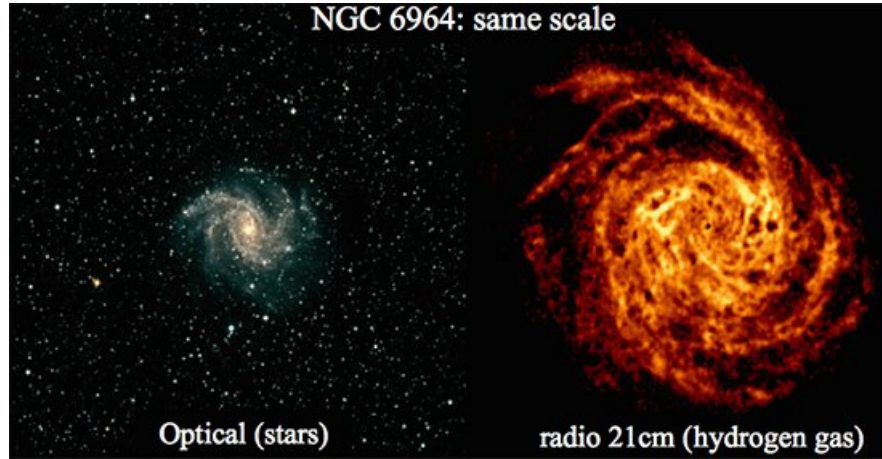
Il profilo della riga a 21 cm per lo studio delle curve di rotazione è la sovrapposizione delle righe che giungono da ogni punto della sorgente, quindi non valutiamo l'effetto



Doppler in un singolo punto di emissione. Sempre grazie alla velocità di rotazione delle regioni HI si ha la relazione empirica di Tully-Fisher tra luminosità assoluta della galassia a spirale e $v(R)$

$$L = 180v(R)^4 \quad \text{con } v(R) = \left[\frac{km}{s} \right]$$





6.3 Diidrogeno: regioni H_2

L'idrogeno gassoso molecolare costituito da due atomi di idrogeno si trova all'interno di dense nubi da cui si formano le stelle (regioni di formazione stellare): le giant molecular clouds (GMC). La densità delle GMC è alta (10^2 part/cm^3). Le transizioni della molecola di H_2 sono di tipo elettronico (UV e visibile), rotazionale (microonde) e vibrazionale (IR). Intorno ai 510 K presenta una transizione di quadrupolo con coefficiente di Einstein $A = 3 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$, rendendola di difficile osservazione. Tramite le difficili osservazioni di H_2 nella via lattea siamo riusciti a trovare un metodo per tracciare la presenza di H_2 anche nelle altre galassie, infatti osservando il flusso prodotto durante una transizione di dipolo a $T = 5.5 \text{ K}$ di CO^1 (I_{CO}), si può valutare il fattore di conversione $\frac{CO}{H_2}(X_{CO})$:

$$X_{CO} = \frac{N_{H_2}}{I_{CO}} \simeq 2 \cdot 10^{20} [\text{cm}^{-2} \text{K}^{-1} \text{s}]$$

con N_{H_2} = densità di colonna di H_2 , in questo modo possiamo valutare N_{H_2} . Per le GMC risulta essere $N_{H_2} > 10^{17} \text{ cm}^{-2}$, in questo modo l'opacità della nube è tale da non lasciare passare né la luce visibile, né i raggi UV (self shielding con $\tau \simeq 1$). Dalle stime di N_{H_2} possiamo valutare il tasso di formazione stellare.

¹Le GMC sono ricche di CO



(a) Nebulosa testa di cavallo



(b) Complesso di Orione

6.4 Regioni HII

L'hot ionized medium (HIM), l'intra cluster medium (ICM) e il warm ionized medium (WIM) sono zone astrofisiche con temperature $T > 10^4 \text{ K}$ dove troviamo la presenza di idrogeno ionizzato.

Il WIM è presente solo nei bracci delle spirali e nelle irregolari dove si ha un'intensa formazione stellare (stelle giovani e calde di classe O-B). In queste zone ho $\rho_{HII} = 10^{-1} - 10^4 \text{ ioni/cm}^3$ e $T = 10^4 \text{ K}$. L'emissività è di bremsstrahlung con emissioni delle regioni HII.

L'ICM è il gas caldo intergalattico. Si suppone che il gas caldo sia stato iniettato da esplosioni di supernova di una popolazione stellare primitiva o prelevato da galassie durante la formazione dell'ammasso. Presenta emissione X e l'emissività è di bremsstrahlung.

L'HIM ha temperature $> 10^6 \text{ K}$. Il gas caldo è prodotto dalle esplosioni di supernova. L'emissività è di bremsstrahlung presentando emissione nella banda X.

A temperature così alte l'ISM è un plasma neutro, in cui il numero di ioni è circa quello degli elettroni liberi. Gli ioni e gli e^- perdono energia a causa delle collisioni, per bremsstrahlung o per ricombinazione ione- e^- . In quest'ultimo caso si stabiliscono su una certa orbita atomica emettendo un fotone di energia $h\nu = E_\infty - E_n$. Dal livello energetico acquisito possono decadere fino a scendere ai livelli $n = 1, 2$, serie Lyman (fotoni UV), Balmer (fotoni visibili) emettendo un fotone, visualizzato come una riga in

emissione. Queste righe sono denominate con il numero n (livello energetico di arrivo), seguito da α se $\Delta n = 1$, β se $\Delta n = 2$, ecc. I fotoni della serie di Balmer sono chiamati H_α (a 656.3 nm , rosso) e H_β (a 486.1 nm , blu).

6.5 Sfera di Strömgren

Vediamo cosa succede se in una regione di spazio ho più fotoni in grado di ricombinare l'idrogeno, che atomi di idrogeno stesso. Le ricombinazioni post ionizzazione potranno non essere efficaci, occorre quindi valutare la quantità presente di fotoni e di idrogeno. Se ci troviamo nelle vicinanze di una stella i fotoni da essa emessi investiranno la nube e quelli con energia maggiore di $E_0 = 13.6 \text{ eV}$ provocheranno lo slegamento dell' e^- dal nucleo atomico che si allontanerà con un'energia $\frac{1}{2}mv^2 = h\nu_{obs} - 13.6 \text{ eV}$.

Si avrà:

$$Q(H) = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{L(\nu)}{h\nu} d\nu = \text{numero di fotoni ionizzanti}$$

con $L(\nu)$ luminosità monocromatica

In una regione vicina alla stella l'idrogeno sarà ionizzato, mentre allontanandoci avremo maggiore probabilità di trovare atomi neutri, infatti ogni guscio concentrico alla stella sottrae fotoni e quindi si capisce che esisterà un raggio massimo oltre il quale la ionizzazione cesserà.

La ricombinazione è ostacolata dall'elevata velocità elettronica, sebbene in condizioni di alta densità si avrà un buon tasso di perdita energetica per bremsstrahlung che determinerà una liberazione fotonica a cascata. In caso di ritorno allo stato fondamentale ci aspettiamo fotoni emessi nella serie di Lyman- α o β , dove i primi possono essere assorbiti da altri atomi che si trovano nello stato fondamentale. Si genera, così, una regione dove prevale la ionizzazione, che è vicina alla stella, mentre nelle zone distanti prevale la ricombinazione. Si definisce

$$\alpha(T) = \sum_n \alpha_n(T) \quad \text{rate di ricombinazione}$$

con

$$\alpha_n(T) = \int_0^\infty \sigma_n(u) u f(u) du = 4 \cdot 10^{-13} \left(\frac{10^4 [K]}{T} \right)^{0.73}$$

dove $f(u)$ può essere una distribuzione alla Maxwell-Boltzmann ed il tempo di ricombinazione sarà:

$$\frac{1}{\alpha(T)n_H} = \frac{10^5}{n_H} [yr]$$

χ = di ionizzazione

n_H = densità di atomi di idrogeno

r = distanza

La ricombinazione è data da:

$$\int n dV = \frac{4}{3} \pi r^3 \alpha(T) \chi^2 n_H^2$$

Allora il tempo che occorrerà per la ricombinazione (per raffreddamento da bremsstrahlung) sarà circa 10^3 yr. La frazione di idrogeno neutro sarà $(1 - \chi^2)$ e combinandola con quella ionizzata farà sì che esista un raggio per il quale i due processi saranno in equilibrio (il raggio della sfera di Strömgren del gas ionizzato):

$$r_s = \left(\frac{3Q}{4\pi\alpha n_H} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Lo spessore della zona di equilibrio non è proprio zero, ma lo si può effettivamente trascurare rispetto le dimensioni di r_s . Nelle regioni HII circa l'1% della radiazione incidente si trova nella riga H_α .

6.6 "Quantum entanglement in astrophysics"

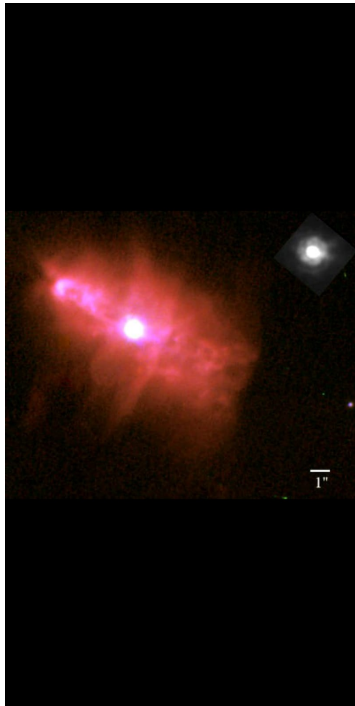
La transizione spontanea dell'atomo di idrogeno conosciuta come $2 \rightarrow 1 S_{\frac{1}{2}}$ è il processo naturale di creazione di coppie di fotoni entangled in astrofisica. Si realizza come una componente in emissione sullo spettro del continuo ottico delle regioni HII e delle nebulose planetarie. Nell'articolo di Javier Gomez (dal titolo originale sopra riportato) di calcolo per il rate di emissione di due fotoni entangled per la nebulosa di Orione, per le nebulose planetarie IC2149 ed NGC7293 e per la corona solare.

Riporto di seguito una breve presentazione degli oggetti trattati:

6.6.1 IC2149 ed NGC7293

IC2149 è una nebulosa planetaria con forma bipolare toroidale, luminosità asimmetrica, massa di $0.03 M_\odot$ e distanza $1585 pc$. È visibile nella costellazione dell'Auriga.

NGC7293 è anch'essa una nebulosa planetaria, conosciuta anche come la nebulosa Elica o Occhio di Dio. È una nebulosa molto vicina, si trova infatti ad una distanza di $157 pc$. È il risultato dell'espulsione di gas e polveri di una stella di tipo solare, durante le ultime fasi della sua vita. Al suo centro troviamo la stella madre, che illumina il materiale che la circonda, e che diventerà una nana bianca. L'età stimata è inferiore a 10000 anni ed è stata dedotta dall'attuale velocità di espansione del gas. È visibile nella costellazione dell'Acquario.



(a) IC2149 nel vicino infrarosso



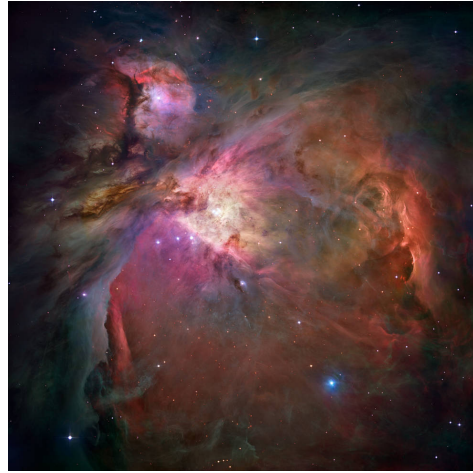
(b) Nebula NGC 7293 infrared image dal telescopio spaziale Spitzer

6.6.2 Nebulosa di Orione

Posta sulla cintura di Orione, costituisce la regione di formazione stellare più vicina alla Terra. Al suo interno è ospitato l'Ammasso del Trapezio (che è un ammasso aperto molto giovane). Si trova ad una distanza di 414 *pc*.



(a) Ammasso del trapezio nell'infrarosso



(b) Nebulosa di Orione

6.6.3 Corona solare

È lo strato più esterno dell'atmosfera solare, situata dopo la cromosfera. Formata dal plasma proveniente dagli strati sottostanti e si estende per milioni di chilometri. Un recente studio di un team internazionale di ricercatori ha dimostrato che i grumi di plasma, provenienti dalla fotosfera, arrivano a oltre 100000 km/s alla corona trasferendo energia e impulso e contribuendo alla sua alta $T = 2 \cdot 10^6 \text{ K}$ (nonostante disti qualche centinaio di km dalla fotosfera, notoriamente a $T = 6000 \text{ K}$). Ricordiamo, infine, la presenza di regioni brillanti, archi coronali e buchi coronali. L'emissione è nella banda X e nell'UV.



Figura 6.2: Corona solare

Rispettivamente la produzione di coppie entangled risulta essere:

- Nebulosa di Orione: $5.80 \cdot 10^{48}$ coppie/sec
- IC2149: $9.39 \cdot 10^{43}$ coppie/sec
- NGC7293: $9.47 \cdot 10^{44}$ coppie/sec
- Corona solare: $1.46 \cdot 10^{16}$ coppie/sec

La distribuzione nella direzione di propagazione di entrambi i fotoni emessi non svanisce da nessuna angolazione, quindi riusciamo a vederli entrambi anche per $\theta = 0$.

Il numero di coincidenze dei fotoni² è proporzionale alla quarta potenza del rapporto tra la distanza della sorgente e il diametro del rivelatore, per questo motivo le coincidenze sono scarse e per rilevarli si devono usare ricevitori molto più grandi di quelli attualmente usati.

6.6.4 Produzione di coppie entangled

In laboratorio coppie di particelle entangled sono prodotte dai seguenti processi:

- annichilazione $e - p$: $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$
- scattering $p - p$
- $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$
- transizione proibita dell'idrogeno: $2 \ ^2S \rightarrow 1 \ ^2S$

Tra le possibili fonti di produzione spontanea di coppie entangled troviamo:

- annichilazione $e - p$ (che si verifica spontaneamente negli interni stellari e nei raggi cosmici)
- scattering $p - p$ (potrebbe avvenire nelle atmosfere stellari o nell'ISM)
- le cascate atomiche SPO prodotte nel calcio (potrebbero avvenire nelle atmosfere stellari)
- transizioni proibite dell'idrogeno $2 \ ^2S_{\frac{1}{2}}$ (avvengono in grande quantità nelle regioni HII e nelle nebulose planetarie)

Come ho già detto le coppie entangled più comuni nelle osservazioni risultano essere quelle prodotte dalla transizione dell'idrogeno $2 \ ^2S_{\frac{1}{2}}$, proprio a causa della grande abbondanza di idrogeno nell'universo.

²Quindi rilevati contemporaneamente o con una differenza di tempo minore alla risoluzione dei rivelatori

6.7 Entanglement nella transizione $2^2S_{\frac{1}{2}}$

I coefficienti di emissione continua nelle regioni HII e nelle nebulose planetarie possono essere spessi in quattro componenti:

- transizioni free-bound e free-free di $H+$
- transizioni free-bound e free-free di He
- transizioni free-bound e free-free di $He+$
- transizioni di $H 2^2S_{\frac{1}{2}}$

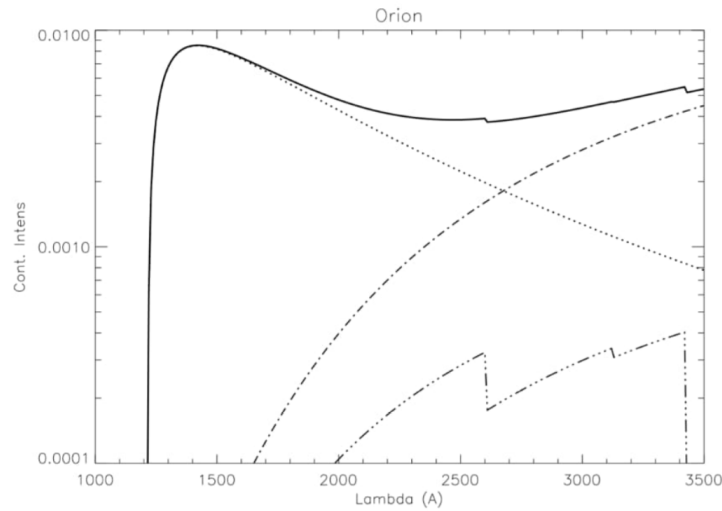


Figure 1: Continuum emission of Orion Nebula, where: two-photon, _._.: recombination of HI, _..._...: recombination of HeI & ____: total. C. Morisset(Inst.Astro.UNAM).

La figura sopra fa vedere che molto del continuo è dovuto all'emissione di questi due fotoni per $\lambda < 2600 \text{ \AA}$.

Nel 1969 un articolo di Novick mostrò che la correlazione angolare tra la direzione di propagazione di entrambi i fotoni è $\propto 1 + \cos^2 \theta$, quindi i fotoni possono essere emessi in ogni direzione l'uno rispetto all'altro. Per la rilevazione astrofisica è un risultato importante perché nelle rilevazioni è conveniente che la direzione di propagazione delle coppie di fotoni sia quasi parallela.

Lo stato di due fotoni entangled in polarizzazione è stato già espresso nel capitolo 5 , per le disuguaglianze BCHSH, qua viene riportato con una notazione diversa (naturalmente la rappresentazione è sempre la stessa):

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = polarizzazione nella direzione dell'asse x

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = polarizzazione nella direzione dell'asse y

Le prime colonne dei prodotti tensoriali sono riferite al fotone 1 mentre le seconde al fotone 2.

La conservazione dell'energia, in termini di frequenza, per i due fotoni impone:

$$\nu_s + \nu_i = \nu_{2,1} = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{1012 \text{ eV}}{h} = 1.46 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

Con una probabilità totale di transizione data dal coefficiente di Einstein di emissione spontanea $A_{2^2S,1^2S} = 8.227 \text{ s}^{-1}$

6.7.1 Regioni astrofisiche

Si presenta un metodo per calcolare il numero totale di fotoni entangled emessi $Q(2q)$ e il numero totale di fotoni prodotti dall'oggetto per il decadimento $2^2S_{1,1,2}$ visti, appunto, come il rate di fotoni fotoionizzanti $Q(H^\circ)$ (numero di fotoni):

- Nebulose planetarie IC2149 ed NGC7293

Definiamo:

$\alpha_B(H^\circ, T)$ = coefficiente che tiene conto delle sole ricombinazioni ai livelli superiori. Le ricombinazioni al livello fondamentale generano fotoni ionizzati (quando $T = 10^4 \text{ K}$ vale $2.59 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$, ma qui ha un valore esatto in base a T)

$\alpha_{H_\beta}^{eff}(H^\circ, T)$ = coefficiente di ricombinazione efficace. Valori tabulati.

$L(H_\beta)$ = luminosità della regione per H_β

$F(H_\beta)$ = flusso dovuto ad H_β

D = distanza della sorgente

Per entrambe le nebulose si ha:

$$Q(H^\circ) = \frac{\alpha_B(H^\circ, T)}{\alpha_{H_\beta}^{eff}(H^\circ, T)} \cdot \frac{L(H_\beta)}{h\nu_{H_\beta}} = \frac{\alpha_B}{\alpha_{H_\beta}^{eff}} \cdot \frac{\pi F(H_\beta)}{4\pi D^2 h\nu_{H_\beta}} \left[\frac{\text{fotoni}}{\text{sec}} \right]$$

Detto $\varepsilon_1 = \frac{2s}{1+n_e}$

Si ha $Q(2q) = \varepsilon_1 Q(H^\circ)$

$$Q(2q) [\text{Ic2149}] = 1.88 \cdot 10^{46} \text{ fotoni/sec}$$

$$Q(2q) [\text{NGC7293}] = 1.95 \cdot 10^{46} \text{ fotoni/sec}$$

- Nebulosa di Orione

Il calcolo per $Q(2q)$ resta identico al caso precedente, ma $\varepsilon = 0.53$
 $Q(H^\circ) = 2.19 \cdot 10^{49}$ e $Q(2q) = 1.16 \cdot 10^{49}$ fotoni/sec

- Corona solare

Dobbiamo calcolare $Q(2q)$. Sia:

$$\check{R} = \frac{R}{R_\odot} \quad \text{con } R_\odot = 6.96 \cdot 10^{10} \text{ cm}$$

n_e densità elettronica

$F_e(\check{R})$ flusso elettronico

$$Q(2q) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{4\pi} \int_{\check{R}=1}^{\check{R}=\check{R}_1} \frac{4\pi R_\odot^3}{4\pi h\nu} F_e(\check{R}) \left(\frac{\check{R}^2 n_e^2 \alpha_B(\check{R})}{A_2 \cdot 2S_1 \cdot 2S} h\nu A_{2p}(y) \right) dy d\Omega d\check{R} = 2.92 \cdot 10^{16} \text{ fotoni/sec}$$

Otteniamo proprio i valori osservati della densità elettronica e della temperatura della corona solare.

Per $1 < \check{R} < 3.83$

$$n_e(\check{R}) = 1.55 \cdot 10^8 \check{R}^{-8} (1 + 1.93 \check{R}^{-10}) \text{ cm}^{-3}$$

Per $\check{R} > 3.83$

$$n_e(\check{R}) = 7.2 \cdot 10^{-5} \check{R}^{-2} \text{ cm}^{-3}$$

$$T_e(\check{R}) = \check{R}^{-217} 10^6 \text{ K}$$

Il numero del segnale fotonico che arriverebbe a terra per cm^2 per sec sarebbe:

$$z_{ph} = \frac{Q(2q)}{8\pi D^2} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad \text{con } [D] = [\text{cm}]$$

Il numero di segnale fotonico che può essere rivelato da un ricevitore di diametro d è:

$$Z_{ph} = z_{ph} \frac{\pi d^2}{4} = \frac{Q(2q)}{32D^2} d^2 \text{ s}^{-1}$$

Sia $C(\Theta)$ il numero di coincidenze di due fotoni che possono essere rilevate da un ricevitore di diametro d ad una distanza D dalla sorgente, che dipende dall'angolo sotteso dal ricevitore:

$$\Theta = \frac{d}{D} [\text{rad}]$$

$$C(\Theta) = \frac{Q(2q)d^2}{8\pi D^2} \frac{1}{3} \left(\frac{d}{D} \right)^2 = \frac{Q(2q)}{24\pi} \left(\frac{d}{D} \right)^4$$

Table 1: Receiver diameters for one two-photon coincidence per hour and per year

Object	L	R_{PP} pairs s^{-1}	$D[1/y]^*$ km	$D[1/y]$ km	$D[1/hr]$ km
Orion Nebula	414 pc	5.8×10^{48}	272	785	7 590
IC 2149	1585 pc	9.39×10^{45}	5 200	14 000	135 000
NGC 7293	157 pc	9.77×10^{44}	906	1 540	14 900
Solar Corona	1 A.U.	1.46×10^{16}	457	457	4420

* No extinction

$$d_{min} = \left[\frac{24\pi C(H)}{Q(2q)} \right]^{114} \cdot D$$

Nella tabella sono presentati il minimo diametro del ricevitore per una rilevazione in coincidenza dei due fotoni per ora e per anno (inclusendo gli effetti di estinzione dell'ISM) per tutti gli oggetti astrofisici studiati.

Gomez arriva alle seguenti conclusioni:

- La possibilità di osservare questo effetto quantistico nelle sorgenti astrofisiche sarebbe molto interessante. Infatti la distanza associata alla non località dovuta all'entanglement sarebbe senza precedenti.
- L'entanglement che può essere meglio rivelato nel nostro universo è la transizione dell'idrogeno $2^2S_{\frac{1}{2}}$.
- La coppia di fotoni conserva lo stato entangled durante il viaggio fino a terra.
- Il miglior oggetto astrofisico che si presta alla rilevazione di coincidenza fotonica è la corona solare.
- Sebbene si sono esplorate le possibilità di rilevazioni dei due fotoni, non si pensa che il livello delle dimensioni proposte per il diametro del ricevitore possa essere realizzato in futuro.

Bibliografia

- [1] F. Ravanini. *Meccanica Quantistica*. Dispense.
- [2] F. Ravanini. *Metodi matematici per la fisica*. Dispense.
- [3] F. Bastianelli, R. Sodati. *Istituzioni di fisica teorica*. Appunti.
- [4] D. J. Griffiths. *Introduction to the Quantum Mechanics*. Pearson Education 2004.
- [5] J. Preskill. *Lecture notes for Ph219/CS219, Quantum Information*. California Institute of Technology, 2015.
- [6] J. Von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. University of Georgia, 1919.
- [7] A. Renyi. *On measures on Entropy and Information*. Proceeding of the 4th Berkeley symposium on mathematics, statistics and probability, 1960.
- [8] H. P. Breuer, F. Petruccione. *The theory of open quantum system*. Oxford University, New York, 2002.
- [9] W. K. Woottens. *Entanglement of formation of an arbitrary states of two qubits*. Phys. Rev. Lett. 90(10): 2245-2248, 1998.
- [10] A. Einstein, B. Podolski & N. Rosen. *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*. Phys. Rev. Lett. 147, 777, 1935.
- [11] J. S. Bell. *On the Einstein Podolski Rosen paradox*. Physics 1, 195, 1964.
- [12] A. Aspect, P. Grangler & G. Roger. *Experimental Realization of Einstein-Podolski-Rosen-Bohm Gedanken Experiment*. A new violation of Bell's inequalities. Phys. Rev. Lett. 49, 91, 1982.
- [13] S. J. Freedman and J. F. Clauser. *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*. Phys. Rev. Lett. 28, 938, 1972.
- [14] P. A. Moreau, E. Tonelli, T. Gregory. R. S. Aspden, P. A. Morris, M. J. Padgell. *Imaging Bell-Type Nonlocal Behavior*. Science Advances 5,7, eaaw2563, 12/07/2019.
- [15] D. Dallacasa. *Processi di Radiazione ed MHD*. Dispense.
- [16] L. Ciotti. *Astrofisica Extragalattica*. Appunti.
- [17] J. Gomez. *Quantum Entanglement in Astrophysics*. Quantum of Quasar workshop-QQ09, December 2-4 2009, Grenoble, France.

Ringraziamenti

Cercherò di essere concisa. L'entanglement non ha un corrispettivo classico, ma se proprio fossi costretta a trovarne uno lo identificherei nell'empatia che si instaura tra la gente.

Con ciò ringrazio tutte le persone che hanno sviluppato con me questa meravigliosa condizione. In primis la mia famiglia: mia madre, mio padre, mia zia, mio fratello e anche il mio cagnolone.

Ringrazio il Professor Ravanini per avermi accettata senza pregiudizi, lasciandomi carta bianca sull'impostazione del lavoro, e tutti quei docenti che si sono prodigati nell'aiutarmi.

Infine ringrazio gli amici che mi hanno sostenuta e mai giudicata, quelli che ci sono e quelli che non ci sono più, ma che saranno, inevitabilmente, presenti nei miei pensieri finché la mia mente avrà la capacità di evocare i ricordi.

Ci sono cose che non si possono fermare e la mia curiosità di sapere com'è l'universo e perché l'universo è quello che è, è una di quelle.